

Schallgeschwindigkeit von Bogoliubov-Anregungen in ungeordneten Bose-Einstein-Kondensaten

Diplomarbeit im Studiengang Physik

an der Universität Bayreuth
am 13. Februar 2009
eingereicht von

Nina Renner

1. Gutachter: Prof. Dr. C. A. Müller
2. Gutachter: Prof. Dr. V. M. Axt

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Motivation	3
1.1	Messung der Schallgeschwindigkeit	4
1.2	Experimentelle Realisierung korrelierter Unordnung	6
2	Unordnungspotential, wechselwirkendes Bose-Einstein-Kondensat und elementare Anregungen	8
2.1	Statistische Eigenschaften von Unordnung	8
2.2	Gross-Pitaevskii-Energiefunktional	11
2.3	Die Gross-Pitaevskii-Gleichung	12
2.3.1	Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung	12
2.3.2	Stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung	13
2.4	Hydrodynamische Gleichungen	13
2.4.1	Kontinuitätsgleichung	13
2.4.2	Euler-Gleichung	14
2.5	Bogoliubov-Anregungsspektrum	15
2.6	Thomas-Fermi-Näherung und Kohärenzlänge	17
3	Hydrodynamische Wellengleichung und Schallgeschwindigkeitskorrektur	20
3.1	Wellengleichung und Selbstenergie	20
3.1.1	Herleitung der Wellengleichung	20
3.1.2	Greensche Funktion und Selbstenergie im effektiven Medium	21
3.2	Korrektur zur Schallgeschwindigkeit	23
3.3	Analytische Grenzfälle der Schallgeschwindigkeitskorrektur	25
3.4	Berechnung der Schallgeschwindigkeit mit Speckle-Unordnung	29
3.5	Zusammenfassung der Ergebnisse	32
4	Entwicklung des Energiefunktionals und Schallgeschwindigkeitskorrektur	34
4.1	Herleitung des Bogoliubov-Hamilton-Operators	34
4.2	Bewegungsgleichungen und Greensche Operatoren	38
4.3	Selbstenergie	40
4.3.1	Imaginärteil der Selbstenergie	41
4.3.2	Realteil der Selbstenergie und Korrektur zur Schallgeschwindigkeit	44
4.4	Behandlung von analytisch berechenbaren Grenzfällen	48
4.5	Zusammenfassung der Ergebnisse	54
5	Vergleich der Ergebnisse mit der numerischen Simulation	56
5.1	Prinzipielle Funktionsweise des Programms im Überblick	56
5.2	Programmbestandteile	57
5.3	Messergebnisse	59
5.4	Ergänzung zur Theorie	62
5.5	Weitere Verbesserungsmöglichkeiten	66
6	Zusammenfassung und Ausblick	68
A	Anhang	69
A.1	Definition der Fourier-Transformationen	69

A.2	Fourier-Transformation der Korrelationsfunktionen	69
A.3	Fourier-Transformation der Wellengleichung (45)	70
A.4	Fourier-Transformation von $\mathcal{V}'(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, t)$	71
A.5	Berechnung der Amplituden $A_{\kappa, \kappa'}^2$ und $A_{\kappa, -\kappa'}^2$	72
A.6	Korrektur der theoretischen Kurve für konstante Teilchenzahl	73
B	Verwendete Mathematica-Programme und Simulations Quellcode	75

1 Einleitung und Motivation

Die erste experimentelle Realisierung der Bose-Einstein-Kondensation 1995, die bereits 1925 von A. Einstein auf der Basis theoretischer Überlegungen von S. N. Bose vorhergesagt worden war, entfachte ein reges Interesse auf dem Forschungsgebiet ultrakalter Atome [1]. Fortschritte in den Kühltechniken und die Ausweitung der theoretischen Untersuchungen auf wechselwirkende Gase trieb dieses Interesse weiter voran. Vor Allem die Gross-Pitaevskii-Gleichung als Basis der theoretischen Betrachtungen eines wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensats hat die Beschreibung vieler physikalischer Phänomene wie Gleichgewichtskonfigurationen, kollektive Oszillationen, Expansion, Interferenz, quantisierte Vortizes, Solitonen, usw. ermöglicht [1]. Dies bietet ein breites Spektrum an investigativen Möglichkeiten, sowohl in experimenteller als auch in theoretischer Hinsicht. Darüber hinaus wird durch Feshbach-Resonanzen eine Änderung von Wechselwirkungsstärke und -vorzeichen durch Einstellen äußerer Parameter, wie ein Magnetfeld, ermöglicht [2], was enorme Vorteile bei der Untersuchung wechselwirkender Systeme bringt. Aber nicht nur die Wechselwirkung der Atome, die bei so niedrigen Temperaturen ($10^{-7}K$ und tiefer) eine wichtige Rolle spielt und erst kollektive Phänomene wie schallartige Anregungen ermöglicht, hat bedeutende Konsequenzen. Auch die Betrachtung von Systemen mit Unordnung ist von großer Bedeutung, da kein reales System frei von Störungen ist und ungeordnete Systeme in der physikalischen Realität weitaus häufiger auftreten als Geordnete. Unordnung wird beispielsweise durch Störstellen in Kristallstrukturen, durch poröse Substrate bei superfluidem Helium [3] oder in ultrakalten atomaren Systemen durch räumliche Fluktuationen der elektrischen Stromstärke in magnetischen Fallen [4] verursacht. Bereits ein kleines Maß an Unordnung kann drastische Auswirkungen auf die Systemeigenschaften und das Systemverhalten, besonders in eindimensionalen Quantensystemen, haben [5]. Unordnung ist unter anderem Ursache der Lokalisierung von Wellen und somit von Metall-Isolator-Übergängen in elektronischen Systemen [6], des Zusammenbruchs der Superfluidität [7], des Bose-Glas-Phasenübergangs [8] oder der Anderson-Lokalisierung in Bose-Einstein-Kondensaten [9]. Somit stellt das Zusammenspiel von Wechselwirkung, externer Unordnung und die Auswirkungen auf schallartige Anregungen in Bose-Einstein-Kondensaten eine sehr interessante Thematik dar, die bereits in anderen theoretischen Arbeiten aufgegriffen worden ist. Jedoch bestehen sehr große Diskrepanzen in den theoretischen Vorhersagen, unter anderem bezüglich des Vorzeichens der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit. So wird in [10] im Rahmen einer selbstkonsistenten stochastischen Mean-Field-Näherung für endliche Temperaturen und beliebige Wechselwirkungs- und Unordnungsstärke durch numerische Rechnung vorhergesagt, dass die Schallgeschwindigkeit mit zunehmender Potentialstärke abnimmt. Ebenfalls eine negative Korrektur wird in [11] im Rahmen einer störungstheoretischen Behandlung eines ungeordneten bosonischen Systems, abgebildet auf ein quantenmechanisches Spin-1/2-XY-Modell, für schwache Unordnung berechnet. Jedoch liefert [12] basierend auf einer dispersiven quanten-hydrodynamischen Behandlung eines verdünnten Bose-Gases im schwachen Unordnungspotential bei $T = 0$ eine positive Korrektur zur Schallgeschwindigkeit. Dies zeigt die Komplexität dieser Thematik und motiviert zu weiteren Nachforschungen auf diesem Gebiet.

Auch in dieser hier vorliegenden Arbeit sollen die Auswirkungen der Unordnung auf die Schallgeschwindigkeit im wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensat untersucht werden. Dies erfolgt über die Berechnung der Selbstenergie im effektiven Medium im Rahmen einer Störungstheorie für schwache Unordnung. Dies liefert letztendlich eine negative Korrektur zur Schall-

geschwindigkeit und steht somit im Einklang mit den Vorhersagen aus [10] und [11], jedoch im Widerspruch zu [12]. Da noch auf keine experimentellen Resultate zurückgegriffen werden kann, werden die Ergebnisse dieser Arbeit zudem noch mit numerischen Daten aus einer Simulation zur Ausbreitung von Schallwellen verglichen und bestätigt. Der Ablauf soll nun wie folgt aussehen: Zunächst wird auf die allgemeine Theorie von Unordnungspotentialen und wechselwirkender Bose-Einstein-Kondensate eingegangen. Es wird über die Gross-Pitaevskii-Gleichung das Bogoliubov-Spektrum hergeleitet, das elementare Anregungen des Kondensats ohne externes Potential beschreibt, und die relevanten Längenskalen vorgestellt, die für unsere Betrachtungen wesentlich sind. Zielsetzung ist natürlich die Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit des Kondensats mit korrelierter Unordnung. Dazu werden zwei mögliche Wege präsentiert, die jeweils in Kapitel 3 und 4 dargestellt sind. Zum Einen wird ein Zugang über eine klassische hydrodynamische Theorie gewählt, die auf einer Wellengleichung für die Teilchendichtefluktuationen basiert. Diese Theorie ist relativ einfach gehalten, liefert aber nichtsdestoweniger bereits gute Resultate. Da sich hier jedoch nicht alle Regime, die uns die systembeschreibenden Längenskalen zur Verfügung stellen, beschreiben lassen, wird in Kapitel 4 eine allgemeingültigere und verbesserte Theorie zur Korrektur der Schallgeschwindigkeit vorgestellt, die auf der Entwicklung des Gross-Pitaevskii-Mean-Field-Energiefunktionalis beruht. In beiden Fällen wird die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in einer Dimension über die Selbstenergie des Systems im effektiven Medium, d.h. im Unordnungsmittel, berechnet. Dabei lassen sich in einigen Grenzfällen einfache analytische Ausdrücke für die Schallgeschwindigkeitskorrektur finden, die ebenfalls diskutiert werden. In Kapitel 5 werden dann schließlich die theoretischen Vorhersagen mit den Ergebnissen einer numerischen Simulation zur Ausbreitung von Schallwellen verglichen. Nach einer Ergänzung zu unserer theoretischen Beschreibung erhalten wir letztendlich eine sehr gute Bestätigung unserer Vorhersagen.

Doch bevor wir mit der Theorie beginnen, soll noch ein kleiner Abriss zu einer experimentellen Messung der Schallgeschwindigkeit ohne Potential und zur Realisierung von Unordnungspotentialen gegeben werden.

1.1 Messung der Schallgeschwindigkeit

Hier soll eine experimentelle Methode zur Messung der Schallgeschwindigkeit in Bose-Einstein-Kondensaten vorgestellt werden, wie sie in [13] angewandt worden ist. Ausgangspunkt ist dabei ein Kondensat aus Natrium-Atomen in einer magnetischen Falle. Anschließend werden kleine lokale Störungen in der Dichte durch die repulsive optische Dipol-Kraft eines auf die Mitte der Falle fokussierten von der Resonanzfrequenz der Atome weit blau-verstimmten Argon-Ionen-Lasers erzeugt. Dies kann auf zwei Arten geschehen. Zum Einen kann eine lokale Zunahme in der Dichte durch plötzliches Einschalten des Lasers erzeugt werden (positive Störung). Dadurch werden die Atome aus der Mitte des Kondensats verdrängt, die in Form von zwei Dichtemaxima symmetrisch mit konstanter Geschwindigkeit nach außen laufen. Alternativ kann das Kondensat in Gegenwart des Laserlichts erzeugt werden. Durch plötzliches Abschalten des Lasers werden lokalisierte Dichteminima erzeugt (negative Störungen), die ebenfalls mit der selben Geschwindigkeit nach außen laufen. Diese beiden Verfahren sind in Abbildung 1 links schematisch dargestellt. Durch die Methode der schnellen Sequenzierung nicht-destruktiver Bildaufnahmen kann die Ausbreitung der Schallwellen detektiert werden (Abbildung 1 rechts). Weitere Informationen zur Detektion, Kühlung und den experimentel-

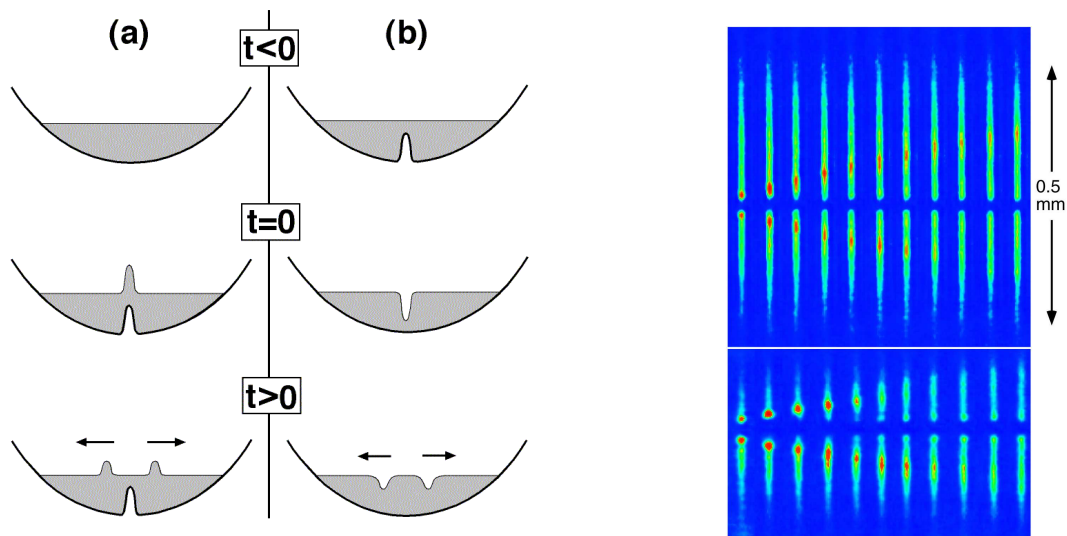


Abbildung 1: Links: Schematische Darstellung der Erzeugung von symmetrisch nach außen laufenden Schallwellen durch positive (a) bzw. negative (b) Störungen. Diese werden durch plötzliches An- bzw. Abschalten eines Argon-Ionen-Lasers zum Zeitpunkt $t = 0$ erzeugt. Rechts: Beobachtung der Ausbreitung von Schallwellen. Die Bilder sind dabei im zeitlichen Abstand von 1.3 ms aufgenommen worden. Die untere Abbildung zeigt die Ausbreitung von Schall bei einer niedrigeren Kondensatdichte. (Aus [13]).

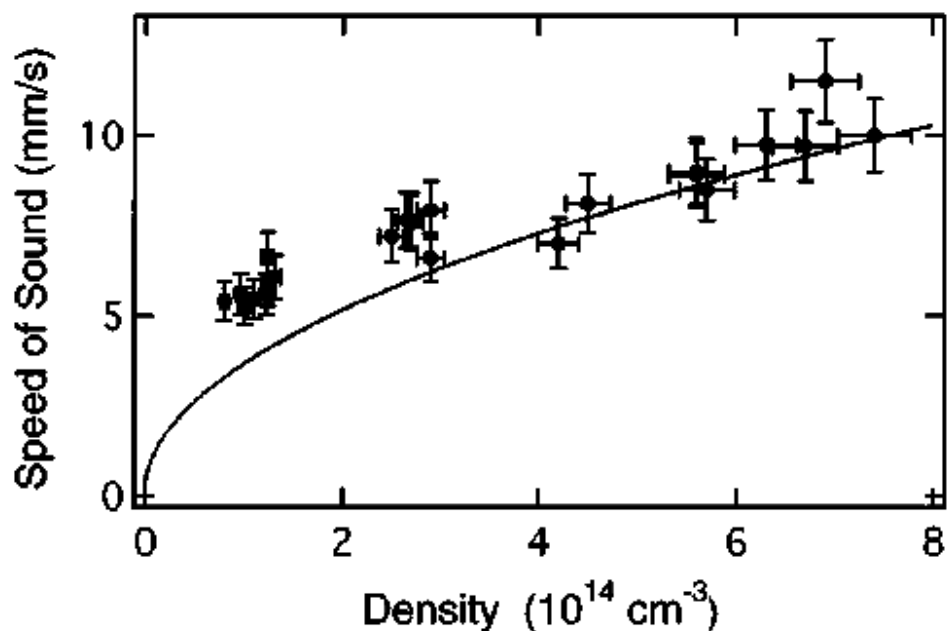


Abbildung 2: Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Kondensatdichte. Theoretische Vorhersage (durchgezogene Linie) und Messpunkte mit statistischem Fehler. (Aus [14]).

len Umsetzungen finden sich in [13]. Abbildung 1 rechts zeigt die Ausbreitung der Schallwellen für zwei unterschiedliche Kondensatdichten (kleinere Dichte im unteren Bild). Die Schallgeschwindigkeit ist dabei proportional zur Wurzel aus der Kondensatdichte $c_s \sim \sqrt{n}$. Dieses Verhalten der Schallgeschwindigkeit ist in Abbildung 2 dargestellt. Dabei stellt die durchgezogene Linie die theoretische Vorhersage dar. Die Messergebnisse sind dabei mit ihren statistischen Fehlern abgebildet. An der Größe der Fehlerbalken zeigt sich, dass es sehr schwierig ist eine aussagekräftige Messung zur Korrektur zur Schallgeschwindigkeit mit Unordnungspotential zu realisieren, da die erwarteten Korrekturen für kleine Potentiale höchstens im einstelligen Prozentbereich liegen (siehe Kapitel 3 und 4). Obwohl diese Messung bereits im Jahr 1997 durchgeführt worden ist, liegen aufgrund dieser Problematik der Messgenauigkeit bis heute keine uns bekannten Messungen zur Korrektur zur Schallgeschwindigkeit im externen Unordnungspotential vor, die zumindest die Frage nach dem Vorzeichen der Korrektur in experimenteller Hinsicht eindeutig klären könnten.

1.2 Experimentelle Realisierung korrelierter Unordnung

Dieser Abschnitt soll eine qualitative Beschreibung zur experimentellen Realisierung eines Unordnungspotentials liefern. Die folgenden Darstellungen basieren auf [5]. Die experimentell am häufigsten realisierte Unordnung ist die Speckle-Unordnung. Umgesetzt wird dies durch Einstrahlung von kohärentem Laserlicht auf eine diffuse Oberfläche, wodurch es zu einer zufälligen Überlagerung von Partialwellen kommt. Das somit erzeugte Potential ist proportional zur Intensität, also dem Betragsquadrat der elektrischen Feldstärke, deren Phase und Amplitude räumlich moduliert ist:

$$V(z) \sim |E(z)|^2 \sim I(z) \quad (1)$$

In Abbildung 3 (a) ist die experimentelle Anordnung zur Erzeugung des Unordnungspotentials schematisch dargestellt. D' ist der Durchmesser des einfallenden Laserstrahls, der durch eine Konvexlinse der Brennweite f fokussiert wird. Dabei kann D' in y - und z -Richtung unterschiedliche Ausdehnung besitzen. Dadurch kommt eine anisotrope Intensitätsverteilung in der y - z -Ebene, wie in Abbildung 3 (b) dargestellt, zustande. (c) zeigt das Intensitätsprofil in z -Richtung und (d) die zugehörige Korrelationsfunktion im Ortsraum. Dabei bezeichnet $C_I(\delta z) = \overline{I(z)I(z + \delta z)}$ die Intensitätskorrelationsfunktion im Unordnungsmittel und Δz die Korrelationslänge. Dabei ist anzumerken, dass, wie in Abbildung 3 (c) ebenfalls zu sehen ist, das Speckle-Potential eine wohldefinierte Basislinie besitzt, im Gegensatz zur Gaußschen Unordnung (vgl. Abb. 27 und 28 in Abschnitt 5.2), aber in seiner Amplitude nach oben unbegrenzt ist. Die endliche Korrelationslänge der Unordnung ist bedingt durch die Wellenlänge des eingestrahlt Lasers und die Apertur und kann durch die Parameter l und D des optischen Systems variiert werden. Wählt man beispielsweise den Laserstrahldurchmesser D' in z -Richtung wesentlich größer als in y -Richtung ($\Delta z \sim 1/D'$), so dass die Korrelationslänge des Potentials in z -Richtung wesentlich kleiner ist als die Ausdehnung des Kondensats, in x - und y -Richtung jedoch so groß, dass das Potential über die Ausdehnung des Kondensats hinweg als konstant angenommen werden kann, so erhält man eine effektiv eindimensionale Unordnung. Nähere Erläuterungen und Angaben zu konkreten Zahlenwerten der Systemparameter finden sich in [5].

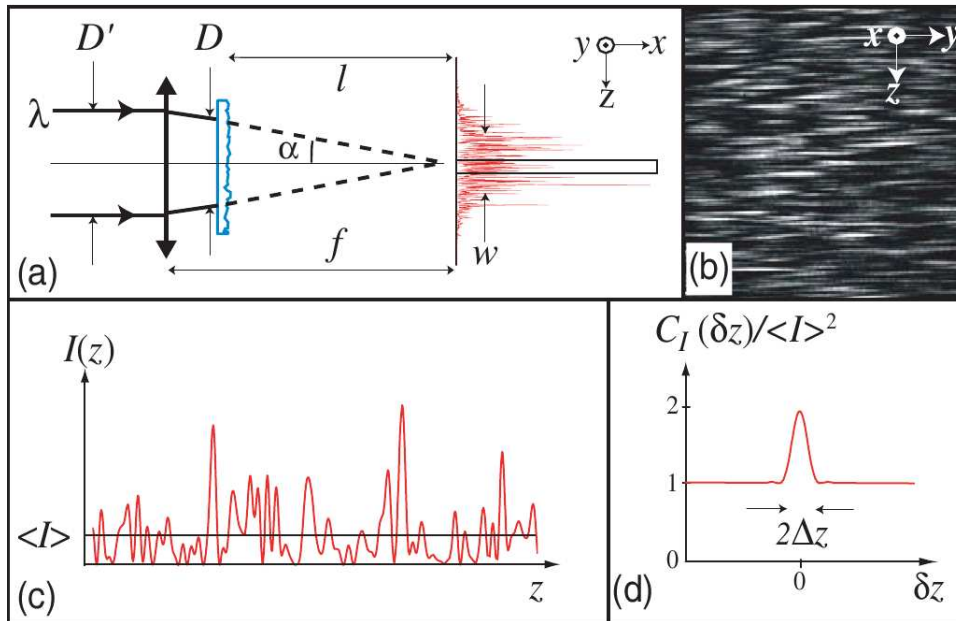


Abbildung 3: (a) Erzeugung einer Speckle-Unordnung mittels kohärentem Laserlicht, das an einer diffusen Oberfläche gestreut wird. (b) Anisotrope Intensitätsverteilung des gestreuten Laserlichts in der y - z -Ebene. (c) Intensitätsprofil in z -Richtung (Vergrößerung des markierten Ausschnitts aus (a)). (d) Zugehörige Intensitätskorrelationsfunktion im Ortsraum. (Aus [5]).

Neben optischen Speckle-Potentialen gibt es noch andere Arten von Unordnung. Beispiele hierfür sind unterschiedliche, lokalisierte Atomarten, durch die Unordnung erzeugt wird [15], inkommensurable optische Gitter [16] oder auch Fluktuationen in Form und Position eines stromdurchflossenen Leiters, wie sie in magnetischen Fallen auftreten und die ein stark gauß-korreliertes Unordnungspotential erzeugen [4].

2 Unordnungspotential, wechselwirkendes Bose-Einstein-Kondensat und elementare Anregungen

Um im späteren Verlauf einen Übergang zur Beschreibung eines Kondensats im Unordnungspotential zu ermöglichen, wird zunächst auf die statistischen Eigenschaften von Unordnung eingegangen. Im Anschluss daran werden die theoretischen Grundlagen zur Beschreibung eines Bose-Einstein-Kondensats vorgestellt. Diese basieren auf einer nichtlinearen Differentialgleichung für den Ordnungsparameter des Systems, der Kondensatwellenfunktion [1]. Startpunkt ist der Vielteilchen-Hamilton-Operator und das daraus resultierende Mean-Field-Energiefunktional. Ausgehend davon gelangt man zur Gross-Pitaevskii-Gleichung, die die Grundlage zur Beschreibung des Kondensats unter Berücksichtigung von Wechselwirkung zwischen den Teilchen und äußerem Potential ist. Der zeitunabhängige Spezialfall dieser Gleichung ist die stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung, auf die ebenfalls kurz eingegangen wird. Des Weiteren können hydrodynamische Gleichungen abgeleitet werden. Dies ist zum Einen die Kontinuitätsgleichung und zum Anderen eine Gleichung, die für langwellige Anregungen des Kondensats mit der Euler-Gleichung eines klassischen, kompressiblen, rotationsfreien Fluids übereinstimmt. Im Rahmen dieser Beschreibung wird anschließend das Anregungsspektrum des Kondensats diskutiert. Dabei wird deutlich, dass die Kohärenzlänge des Kondensats eine bedeutende Längenskala darstellt. Dies wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels zusammen mit der Einführung der Thomas-Fermi-Näherung noch vertieft. Die Abschnitte 2.2 - 2.6 dieses Kapitels lehnen sich an die Darstellungen in [2] an.

2.1 Statistische Eigenschaften von Unordnung

Jede einzelne Realisierung von Unordnung ist zufallsbedingt und somit anders. Um nun Aussagen über den Einfluss von Unordnung auf Systemeigenschaften wie die Schallgeschwindigkeit machen zu können, die unabhängig von der jeweiligen Realisierung der Unordnung sind, muss über sehr viele Realisierungen der Unordnung gemittelt werden. Man betrachtet sich die Systemeigenschaften also in einem effektiven Medium [17]. Dies hat zur Folge, dass nicht mehr das Unordnungspotential einer speziellen Realisierung selbst eine Rolle spielt, sondern nur noch dessen statistische Eigenschaften im Unordnungsmittel. Im Folgenden soll nur auf die für diese Arbeit relevanten Momente des Unordnungspotentials in einer Dimension eingegangen werden. Dies sind zum Einen der Mittelwert des Potentials

$$\overline{V(r)} \equiv 0, \quad (2)$$

der gleich Null gesetzt werden kann, da dies nur eine konstante Verschiebung des Energienullpunkts zur Folge hat und keine Auswirkungen auf die physikalischen Eigenschaften des Systems, und zum Anderen die Autokorrelationsfunktion des Unordnungspotentials

$$\overline{V(r')V(r'+r)} \equiv V_0^2 K\left(\frac{r}{\sigma}\right), \quad (3)$$

wobei σ die Korrelationslänge und V_0 die Potentialstärke bezeichnen. Als Darstellung im k -Raum soll die Korrelationsfunktion wie folgt bezeichnet werden:

$$\overline{V_k V_{k'}} \equiv \sigma V_0^2 C(k\sigma) \delta(k + k'). \quad (4)$$

Der Zusammenhang zwischen $K(\frac{r}{\sigma})$ und $C(k\sigma)$ ergibt sich aus der Fourier-Transformation von $\overline{V(r') V(r' + r)}$:

$$\begin{aligned} \overline{V_k V_{k'}} &= \frac{1}{2\pi} \int dr dr' \overline{V(r) V(r+r')} e^{-ik'r} e^{-ik(r+r')} \\ &= \delta(k + k') V_0^2 \int dr' K\left(\frac{r'}{\sigma}\right) e^{-ikr'} \\ &= \delta(k + k') V_0^2 \sigma \int dr' K(r') e^{-ik\sigma r'}. \end{aligned} \quad (5)$$

Somit erhält man

$$C(k\sigma) = \int dr' K(r') e^{-ik\sigma r'}. \quad (6)$$

Im Fall einer wie in Abschnitt 1.2 beschriebenen Speckle-Unordnung ist die Korrelationsfunktion des Potentials proportional zur Intensitätskorrelation $\overline{I(r') I(r' + r)}$ des elektrischen Feldes $E(r)$, welche sich aus der Intensitätsverteilung $I(r) \sim |E(r)|^2$ berechnen lässt. Da das elektrische Feld aus einer zufälligen Überlagerung von Partialwellen entsteht, kann die Feldamplitude $\mathcal{E}(r)$ am Ort r als lineare Überlagerung der Amplituden und Phasen von N unkorrelierten, elementaren Streueignissen beschrieben werden [17]:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |a_k| e^{i\phi_k}. \quad (7)$$

Die Phasen ϕ_k sind dabei gleichverteilt über das Intervall $[0, 2\pi]$, was dazu führt, dass Real- und Imaginärteil der Feldamplitude $\mathcal{E}(r) = \Re[\mathcal{E}(r)] + i\Im[\mathcal{E}(r)]$ statistisch unabhängig sind. Dies ist relevant für die Implementierung der Erzeugung eines Speckle-Potentials in der numerischen Simulation, da somit Real- und Imaginärteil der Feldamplitude aus statistisch unabhängigen Zufallszahlen generiert werden können (siehe Abschnitt 5.2). Weitere Erläuterungen zur Speckle-Statistik finden sich in [17].

Als Beispiele sind in den Abbildungen 4 und 5 zwei für diese Arbeit relevante Korrelationsfunktionen,

- die Gauß-Korrelationsfunktion:
$$\begin{aligned} K\left(\frac{r}{\sigma}\right) &= e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \\ C(k\sigma) &= \sqrt{2\pi} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \end{aligned}$$
- und die Speckle-Korrelationsfunktion [17]:
$$\begin{aligned} K\left(\frac{r}{\sigma}\right) &= \frac{\sin^2\left(\frac{r}{\sigma}\right)}{\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2} \\ C(k\sigma) &= \pi \left(1 - \frac{|k|\sigma}{2}\right) \theta\left(1 - \frac{|k|\sigma}{2}\right) \end{aligned}$$

im Orts- und im k -Raum dargestellt. Die Fourier-Transformationen dieser Korrelationsfunktionen finden sich im Anhang A.2. Während die Fourier-Transformierte der Gauß-Funktion natürlich wieder eine Gauß-Funktion ist, ergibt sich für die Speckle-Korrelationsfunktion ein Dreieck in k -Raum-Darstellung.

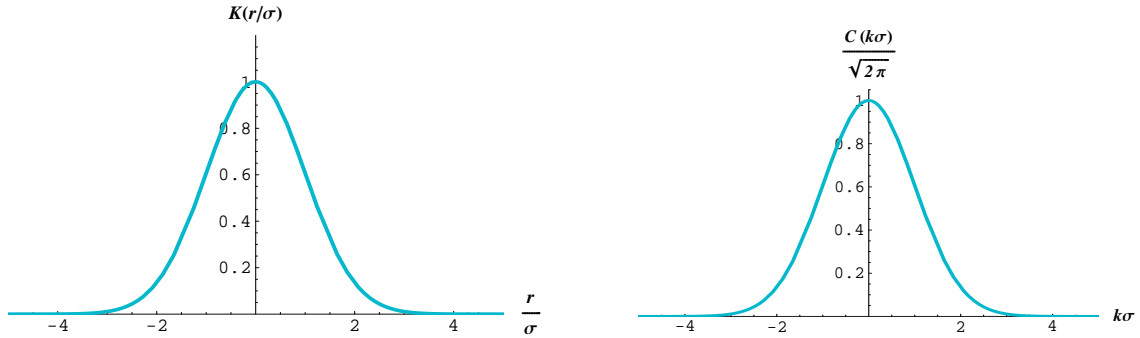


Abbildung 4: Gauß-Korrelationsfunktion im Ortsraum (links) und im k -Raum (rechts).

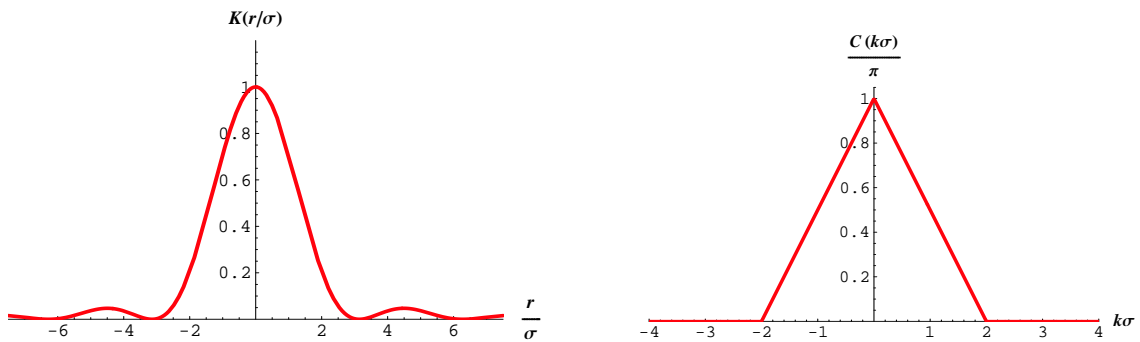


Abbildung 5: Speckle-Korrelationsfunktion im Ortsraum (links) und im k -Raum (rechts).

Im späteren Verlauf bei der Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit wird die Korrelationsfunktion allgemein gehalten, sie soll lediglich ein paar grundlegende Eigenschaften besitzen, die sich auch an den Beispielen in den Abbildungen 4 und 5 zeigen:

- $K(r/\sigma)$ und $C(k\sigma)$ sind achsensymmetrisch bzgl. $r = 0$ bzw. $k = 0$.
- $K(r/\sigma)$ zerfällt im Ortsraum auf der Längenskala der Korrelationslänge σ .
- $C(k\sigma)$ zerfällt im k -Raum auf der Längenskala der inversen Korrelationslänge $\frac{1}{\sigma}$.

Hier wurden nun alle Eigenschaften von Unordnungspotentialen und deren Korrelationsfunktionen zusammengefasst, die im späteren Verlauf dieser Arbeit relevant sind und auf die bei der Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit zurückgegriffen wird. Aber zunächst wird in den folgenden Abschnitten erst noch auf die Theorie der wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensate eingegangen.

2.2 Gross-Pitaevskii-Energiefunktional

Im diesem Abschnitt wird der Hamilton-Operator des N -Teilchen-Systems vorgestellt. Mit einem geeigneten Ansatz für die Vielteilchenwellenfunktion ergibt sich daraus das Mean-Field-Energiefunktional, das die Basis aller weiteren Überlegungen ist.

Im Fall kleiner Streulängen in Relation zum mittleren Teilchenabstand kann die Wechselwirkung zwischen den Teilchen als effektive Delta-Wechselwirkung $g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ mit Wechselwirkungsstärke g beschrieben werden. Dabei hängt g mit der Streulänge a wie folgt zusammen: $g = 4\pi\hbar^2 a/m$. Der Hamilton-Operator für das N -Teilchen-System mit äußerem Potential $V(\mathbf{r})$ und Wechselwirkung lautet nun

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\mathbf{p}_i^2}{2m} + V(\mathbf{r}_i) \right] + g \sum_{i<j} \delta(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j). \quad (8)$$

Die die Bose-Einstein-Kondensation auszeichnenden Eigenschaften sind bekanntlich die makroskopische Besetzung des Grundzustands und die makroskopische Phasenkohärenz. Die Tatsache, dass im Kondensat nahezu alle Atome den gleichen Quantenzustand besetzen, ermöglicht die Beschreibung des Kondensats im Rahmen einer Mean-Field-Theorie, was beispielsweise bei superfluidem ^4He aufgrund der starken Wechselwirkung nicht möglich ist [2]. Die Wellenfunktion der Vielteilchen-Zustände ist das symmetrisierte Produkt von Einteilchen-Wellenfunktionen. In Mean-Field-Näherung wird nun angenommen, dass sich im vollständig kondensierten Zustand alle Teilchen im gleichen Einteilchen-Zustand $\phi(\mathbf{r})$ befinden und die Anregung von Teilchen in andere Zustände aufgrund der Teilchenwechselwirkung vernachlässigt werden kann. Diese relative Verminderung der Teilchenzahl im Kondensat aufgrund von Wechselwirkung ist proportional zu $(\frac{a}{r_s})^{\frac{3}{2}}$. Dabei bezeichnet r_s den Radius einer Kugel, deren Volumen dem mittleren Volumen eines Teilchens im Kondensat entspricht, und a bezeichnet die Streulänge. Somit ist in Bose-Einstein-Kondensaten mit geringen Dichten und kleinen Streulängen diese Vernachlässigung gerechtfertigt. Der Ansatz für die Vielteilchen-Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N)$ als Produktzustand der Einteilchen-Zustände $\phi(\mathbf{r})$ lautet nun

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \phi(\mathbf{r}_i), \quad (9)$$

wobei für die Einteilchen-Wellenfunktion die Normierungsbedingung

$$\int d\mathbf{r} |\phi(\mathbf{r})|^2 = 1 \quad (10)$$

erfüllt ist. Die Energie dieses Zustands ist somit gegeben durch

$$\mathcal{E} = N \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\phi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\phi(\mathbf{r})|^2 + \frac{N-1}{2} g |\phi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (11)$$

Unter der Voraussetzung großer Teilchenzahlen N und mit der Einführung der Kondensat-Wellenfunktion $\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \phi(r)$ und der Teilchendichte $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ erhält man das Gross-Pitaevskii-Energiefunktional

$$\mathcal{E}(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + V(\mathbf{r}) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} g |\psi(\mathbf{r})|^4 \right], \quad (12)$$

bzw. im großkanonischen Ensemble:

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + (V(\mathbf{r}) - \mu) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} g |\psi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (13)$$

Dieses Funktional bildet nun den Ausgangspunkt aller weiteren Rechnungen, denn zum Einen wird daraus die Gross-Pitaevskii-Gleichung hergeleitet. Aus dieser erhält man wiederum hydrodynamische Gleichungen, mittels derer die Schallgeschwindigkeitskorrektur in Kapitel 3 berechnet wird. Zum Anderen wird über eine Sattelpunktsentwicklung dieses Funktionals die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in Kapitel 4 berechnet.

2.3 Die Gross-Pitaevskii-Gleichung

Grundlage zur Beschreibung eines Bose-Einstein-Kondensats im äußeren Potential und unter Berücksichtigung von Wechselwirkung zwischen den Teilchen ist die sogenannte Gross-Pitaevskii-Gleichung. Diese kann aus einem Variationsprinzip hergeleitet werden und beschreibt die Dynamik des Kondensats. Des Weiteren wird in diesem Kapitel noch auf die zeitunabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung eingegangen, die man durch Minimieren des großkanonischen Energiefunktionals erhält und die die stationären Eigenschaften des Kondensats wiedergibt.

2.3.1 Herleitung der Gross-Pitaevskii-Gleichung

Die Gross-Pitaevskii-Gleichung erhält man durch Minimieren des Wirkungsfunktional, d.h. die Variation des Funktionals muss verschwinden:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0. \quad (14)$$

Die Lagrange-Funktion L ist dabei gegeben durch

$$L = \int d\mathbf{r} \left[\frac{i\hbar}{2} \left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial\psi^*}{\partial t} \right) \right] - \mathcal{E}, \quad (15)$$

wobei \mathcal{E} das Energiefunktional (12) bezeichnet. Des Weiteren muss die Variation von ψ bzw. ψ^* an den Grenzen t_1 und t_2 verschwinden. Daraus erhält man nun die zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + g |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = i\hbar \frac{\partial\psi(\mathbf{r})}{\partial t}. \quad (16)$$

Diese hat die Form einer Schrödinger-Gleichung mit einem nichtlinearen Beitrag. Dieser resultiert aus der Wechselwirkung der Teilchen mit dem mittleren Feld der anderen. Die Gross-Pitaevskii-Gleichung ist die zentrale Gleichung in der Theorie der wechselwirkenden Bose-Einstein-Kondensate. Ihre Lösungen beschreiben eine Vielzahl an physikalischen Phänomenen wie kollektive Oszillationen, Expansion, Interferenz, Solitonen, etc. [1], auf die hier nicht weiter eingegangen wird. Gl. (16) dient im Abschnitt 2.4 zur Herleitung hydrodynamischer Gleichungen. Doch vorher wird noch kurz auf die stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung eingegangen.

2.3.2 Stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung

Der stationäre Spezialfall von Gl. (16) ist die stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung. Zur Herleitung geht man vom großkanonischen Energiefunktional (13) aus. Will man nun das ψ bestimmen, das die Energie des Systems minimiert, so führt die Variation des Energiefunktional nach ψ^* auf die stationäre Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + g |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}). \quad (17)$$

Diese hat die Form einer nichtlinearen stationären Schrödinger-Gleichung mit dem chemischen Potential μ an Stelle der Energie pro Teilchen als Energie-Eigenwert. Ohne Wechselwirkung ist μ identisch mit der Energie pro Teilchen. Des Weiteren ergibt sich aus Gl. (17) die Gleichgewichtsdichte des Kondensats n_∞ ohne Potential:

$$g |\psi(\mathbf{r})|^2 \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}) \quad \Rightarrow \quad n_\infty = \frac{\mu}{g}. \quad (18)$$

2.4 Hydrodynamische Gleichungen

Ausgehend von der zeitabhängigen Gross-Pitaevskii-Gleichung (16) werden nun hydrodynamische Gleichungen abgeleitet. Dies sind zum Einen die Kontinuitätsgleichung für die Teilchendichte und zum Anderen eine der Euler-Gleichung aus der klassischen Hydrodynamik ähnliche Gleichung, die im Schall-Regime, d.h. für langwellige Anregungen des Kondensats, identisch sind. Diese beiden Gleichungen beschreiben das Kondensat in Abhängigkeit seiner Dichte $n(\mathbf{r})$ und seines lokalen Geschwindigkeitsfeldes $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, das, wie sich gleich zeigen wird, zudem noch rotationsfrei ist.

2.4.1 Kontinuitätsgleichung

Multipliziert man nun Gl. (16) von links mit $\psi^*(\mathbf{r}, t)$ und subtrahiert davon das komplex Konjugierte erhält man die Kontinuitätsgleichung für die Teilchendichte $n(\mathbf{r}, t) = |\psi(\mathbf{r}, t)|^2$:

$$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} + \nabla \cdot \left[\frac{\hbar}{2m i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \right] = 0. \quad (19)$$

Mit der Definition des Geschwindigkeitsfeldes des Kondensats

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{2mi} \frac{\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*}{|\psi|^2} \quad (20)$$

kann Gl. (19) geschrieben werden als:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \mathbf{v}) = 0. \quad (21)$$

Nun hat die Kontinuitätsgleichung der Kondensatdichte exakt die selbe Form wie die einer idealen Flüssigkeit [18]. Jetzt kann noch gezeigt werden, dass das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{v} rotationsfrei ist. Zu diesem Zweck drückt man die Kondensatwellenfunktion ψ durch ihre Amplitude und Phase aus:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} e^{i\varphi(\mathbf{r}, t)}. \quad (22)$$

Setzt man nun (22) in (20) ein, so führt dies auf folgenden Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Phasengradienten:

$$\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi. \quad (23)$$

Da das Geschwindigkeitsfeld als Gradientenfeld dargestellt werden kann, ist es somit rotationsfrei (“irrotational flow”).

2.4.2 Euler-Gleichung

Um nun auch noch ein Analogon zur klassischen Euler-Gleichung zu finden, separiert man nach Einsetzen von Gl. (22) in die zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung (16) Real- von Imaginärteil und man erhält zunächst die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot \left[n(\mathbf{r}, t) \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi(\mathbf{r}, t) \right], \quad (24)$$

$$-\hbar \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m \sqrt{n(\mathbf{r}, t)}} \nabla^2 \sqrt{n(\mathbf{r}, t)} + \frac{1}{2} m v^2(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}) + g n(\mathbf{r}, t). \quad (25)$$

Der Imaginärteil (24) liefert wieder die Kontinuitätsgleichung. Der Gradient angewendet auf den Realteil Gl. (25) führt auf folgendes Resultat:

$$m \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla \left(V + n g + \frac{1}{2} m v^2 \right) + \nabla \frac{\hbar^2}{2m \sqrt{n}} \nabla^2 \sqrt{n}. \quad (26)$$

Der letzte Term auf der rechten Seite ist der sogenannte Quantendruck. Dieser kann für langwellige Anregungen des Kondensats vernachlässigt werden, was sich bei der Herleitung des

Anregungsspektrums noch deutlicher zeigen wird. Des Weiteren gilt für ein rotationsfreies Geschwindigkeitsfeld $\nabla \frac{1}{2} v^2 = (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}$. Damit und unter Vernachlässigung des Quantendrucks lässt sich Gleichung (26) schreiben als

$$m \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla(g n + V). \quad (27)$$

Diese Gleichung ist nun identisch mit der Euler-Gleichung für eine ideale, kompressible Flüssigkeit ([18],[2]) und gültig für Anregungen im Schall-Regime (siehe Abschnitt 2.5). Aus den Gleichungen (21) und (26) kann im Folgenden nun das Anregungsspektrum hergeleitet werden.

2.5 Bogoliubov-Anregungsspektrum

Nun werden elementare Anregungen des Kondensats ohne äußeres Potential untersucht. Zur Herleitung der Dispersionsrelation verwendet man hierbei die Kontinuitätsgleichung (21) und die Euler-Gleichung (26) für $V = 0$, wobei auch der Quantendruck berücksichtigt werden muss, da man sich nicht nur auf kleine Wellenzahlen beschränkt. Unter der Annahme kleiner Abweichungen vom Gleichgewichtszustand gilt für die Dichte und das Geschwindigkeitsfeld $n = n_\infty + \delta n$ und $\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \delta \varphi$, wobei $n_\infty = \frac{\mu}{g}$ die Gleichgewichtsdichte bezeichnet und das Geschwindigkeitsfeld im Gleichgewicht identisch Null ist. Nach Einsetzen in Gl. (21) und (26) werden die beiden Gleichungen in δn und \mathbf{v} linearisiert (Bogoliubov-Näherung). Anschließend kann \mathbf{v} durch Kombination der beiden linearisierten Gleichungen zu einer Gleichung für δn eliminiert werden:

$$\left(m \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \nabla^2 + \frac{\hbar^2}{4m} \nabla^4 \right) \delta n(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (28)$$

Diese Gleichung besitzt im k - ω -Raum die Form

$$\left(m \omega^2 - \mu k^2 - \frac{\hbar^2}{4m} k^4 \right) \delta n(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (29)$$

Aus ihr ist die Bogoliubov-Dispersionsrelation sofort abzulesen:

$$\epsilon_k = \hbar \omega = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\mu \right)}. \quad (30)$$

Im Grenzfall kleiner Wellenzahlen ergibt sich ein linearer Verlauf der Dispersionsrelation

$$\epsilon_k = c_s \hbar k \quad (31)$$

mit der Schallgeschwindigkeit $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{m}} = \sqrt{\frac{n_\infty g}{m}}$. Mit Gl. (18) ist diese proportional zur Wurzel aus der Kondensatdichte, wie bereits bei der experimentellen Messung der Schallgeschwindigkeit zu sehen gewesen ist (Abschnitt 1.1). Für große Wellenzahlen ergibt sich die

Dispersionsrelation für ein freies Teilchen mit einem zusätzlichen Mean-Field-Beitrag, der mittleren potentiellen Energie μ eines Teilchens:

$$\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \mu. \quad (32)$$

Nun ist es notwendig eine Längenskala einzuführen, die darüber entscheidet, wann eine Anregung Schall- bzw. Teilchencharakter besitzt. Zu diesem Zweck wird noch kurz auf den Quantendruck eingegangen. Dieser geht in die Gleichungen (28) und (29) als dritter Term auf der linken Seite ein. Er liefert also keinen relevanten Beitrag zur Energie der Anregung falls gilt:

$$\frac{\hbar^2}{4m} k^4 \ll \mu k^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{2m\mu} k^2 \ll 1. \quad (33)$$

Nun wird der Begriff der Kohärenzlänge ξ eingeführt. Diese ist wie folgt definiert:

$$\xi^2 \equiv \frac{\hbar^2}{2m\mu}. \quad (34)$$

Somit wird aus der Bedingung (33) (mit $\mathcal{O}(\sqrt{2}) = \mathcal{O}(1)$)

$$\xi \ll \frac{1}{k}. \quad (35)$$

Die Kohärenzlänge ξ legt also eine relevante Längenskala fest und entscheidet darüber, wann der Quantendruck vernachlässigbar wird, nämlich für langwellige Anregungen bzw. kleine Wellenzahlen k . Nun kann auch das Bogoliubov-Anregungsspektrum durch die Kohärenzlänge ausgedrückt werden:

$$\epsilon_k = \mu k \xi \sqrt{k^2 \xi^2 + 2}. \quad (36)$$

Auch hier sieht man deutlich, dass die Kohärenzlänge die entscheidende Längenskala ist. Für $\frac{1}{k} \ll \xi$ besitzen die Anregungen Teilchencharakter und das Schall-Regime, das für uns im weiteren Verlauf das Relevante sein wird, ist somit festgelegt durch die Bedingung

$$\xi \ll \frac{1}{k}. \quad (37)$$

Würde man sich von vorneherein auf schallartige Anregungen beschränken wollen und den Quantendruck bereits in Gl. (26) vernachlässigen, würde dies zu einer homogenen Wellengleichung für δn führen und unmittelbar die Schall-Dispersionsrelation (31) liefern.

An der graphischen Darstellung der Dispersionsrelation (36) und den beiden Grenzfällen (31) und (32) in Abbildung 6 erkennt man deutlich den Übergang vom Schall-Regime ($\xi \ll \frac{1}{k}$), in

dem die kinetische Energie der Teilchen von der Wechselwirkungsenergie dominiert und der Quantendruck vernachlässigbar wird, zum Bereich $\xi \gg \frac{1}{k}$, in dem sich die Teilchen als freie Teilchen verhalten.

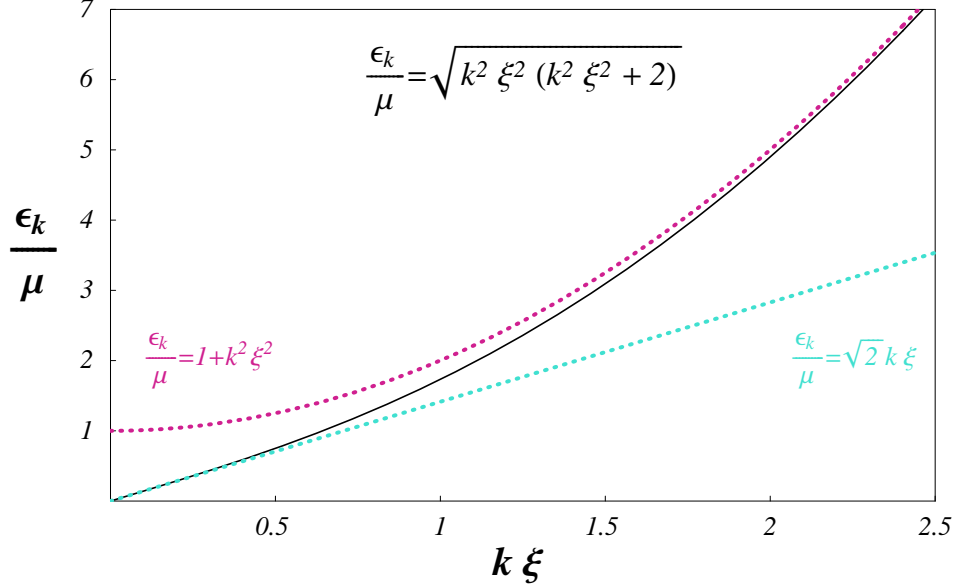


Abbildung 6: Bogoliubov-Anregungsspektrum (schwarz) und die Grenzfälle der teilchenartigen (rosa) bzw. schallartigen (blau) Anregungen.

2.6 Thomas-Fermi-Näherung und Kohärenzlänge

In diesem Abschnitt soll der Kohärenzlänge ξ noch eine etwas anschaulichere Bedeutung zugewiesen werden. Zunächst wird dabei auf die Thomas-Fermi-Näherung der Teilchendichte eingegangen.

Falls sich die Kondensatwellenfunktion in einem betrachteten Raumbereich nur wenig ändert bzw. in diesem Raumbereich als nahezu konstant angenommen werden kann, so kann in der Gross-Pitaevskii-Gleichung (17) der Beitrag der kinetischen Energie $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi$ vernachlässigt werden und man erhält:

$$[V(\mathbf{r}) + g|\psi(\mathbf{r})|^2] \psi(\mathbf{r}) = \mu \psi(\mathbf{r}). \quad (38)$$

Gl. (38) kann nun nach der Teilchendichte $n = |\psi|^2$ aufgelöst werden, was zur Teilchendichte in Thomas-Fermi-Näherung führt:

$$n_{TF}(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2 = \frac{1}{g} [\mu - V(\mathbf{r})]. \quad (39)$$

Dies bedeutet also, dass die Kondensatdichte unmittelbar einer räumlichen Änderung des Potentials folgt. Es wird aber auch klar, dass für zu starke räumliche Änderungen des Potentials auch die Dichte und somit die Kondensatwellenfunktion stark variiert und folglich die Thomas-Fermi-Näherung ihre Gültigkeit verliert. Um nun den Gültigkeitsbereich der Thomas-Fermi-Näherung quantitativ zu beschreiben wird hier wieder auf den Begriff der Kohärenzlänge zurückgegriffen und ihr eine anschauliche Bedeutung zugewiesen.

Betrachtet man ein Kastenpotential, so ist die Teilchendichte am Ort der Wand gleich Null. Weit entfernt von der Wand besitzt die Teilchendichte ihren Maximalwert $n_\infty = \frac{\mu}{g}$ (Kondensatdichte im Gleichgewicht) und ändert sich räumlich nicht. Die Wellenfunktion benötigt also eine gewisse Länge um ihren Maximalwert zu erreichen. Diese Länge wird als Kohärenzlänge ξ bezeichnet. In der Nähe der Wand ist also der Beitrag der kinetischen Energie groß, da sich dort die Wellenfunktion räumlich stark ändert. Nach Erreichen ihres Maximalwerts dagegen ist sie räumlich konstant und es dominiert die Wechselwirkungsenergie. Die Thomas-Fermi-Näherung ist also in der Nähe der Wand nicht mehr geeignet die Teilchendichte zu beschreiben, und zwar genau dann, wenn die kinetische Energie die Größenordnung der Wechselwirkungsenergie erreicht. Die kinetische Energie pro Teilchen in einem Abstand von der Wand kleiner ξ ist von der Ordnung $\hbar^2/2m\xi^2$ und somit in der selben Größenordnung der Wechselwirkungsenergie falls gilt:

$$\frac{\hbar^2}{2m\xi^2} = n_\infty g = \mu. \quad (40)$$

Damit erhält man für die Kohärenzlänge

$$\xi^2 = \frac{\hbar^2}{2m\mu}. \quad (41)$$

Die Kohärenzlänge ist somit ein Kriterium für den Geltungsbereich der Thomas-Fermi-Näherung. Sie beschreibt auf welcher Längenskala die Wellenfunktion variiert um auf eine Störung zu reagieren. Im konkreten Fall eines äußeren Unordnungspotentials bedeutet dies, dass die Wellenfunktion bzw. die Teilchendichte unmittelbar dem Potentialverlauf folgen kann, falls dieses auf einer Längenskala variiert, die größer ist als die Kohärenzlänge. Variiert das Potential jedoch auf einer kürzeren Längenskala, so kann die Teilchendichte dem Potentialverlauf nicht mehr folgen und die Thomas-Fermi-Näherung verliert ihre Gültigkeit. Die Längenskala, auf der ein Potential variiert, ist seine Korrelationslänge σ . D.h. die Thomas-Fermi-Näherung ist gültig, falls gilt:

$$\xi \ll \sigma. \quad (42)$$

In Abbildung 7 sind die Teilchendichte $n(r)$ und das Potential $V(r)$ eines Kondensats mit Gaußscher Unordnung für drei unterschiedliche Verhältnisse von ξ und σ dargestellt. Die Kurven der Teilchendichten und Potentiale sind aus Werten der numerischen Simulation (Kapitel 5) erstellt worden und dienen hier nur zur qualitativen Veranschaulichung. Allerdings ist zu erwähnen, dass die y -Achse aller drei Darstellungen einheitlich skaliert worden ist. Man

erkennt deutlich, dass für $\sigma/\xi = 20$ die Teilchendichte dem Potential spiegelbildlich folgt. Hohe Potential-Peaks haben geringe Teilchendichten zur Folge und umgekehrt, was unmittelbar einsichtig ist. Für $\sigma/\xi = 0.5$ variiert das Potential auf einer kürzeren Längenskala als ξ und man erkennt, dass die Teilchendichte dem Potentialverlauf nur noch in groben Zügen folgt. Für $\sigma/\xi = 0.03$ ändert sich das Potential auf einer so kurzen Längenskala in Relation zu ξ , dass die Dichte im abgebildeten Längenbereich von 250σ sehr glatt verläuft und kaum noch von $n_\infty = \frac{\mu}{g}$ abweicht. n_∞ bezeichnet hier wieder die Gleichgewichtsdichte ohne Potential.

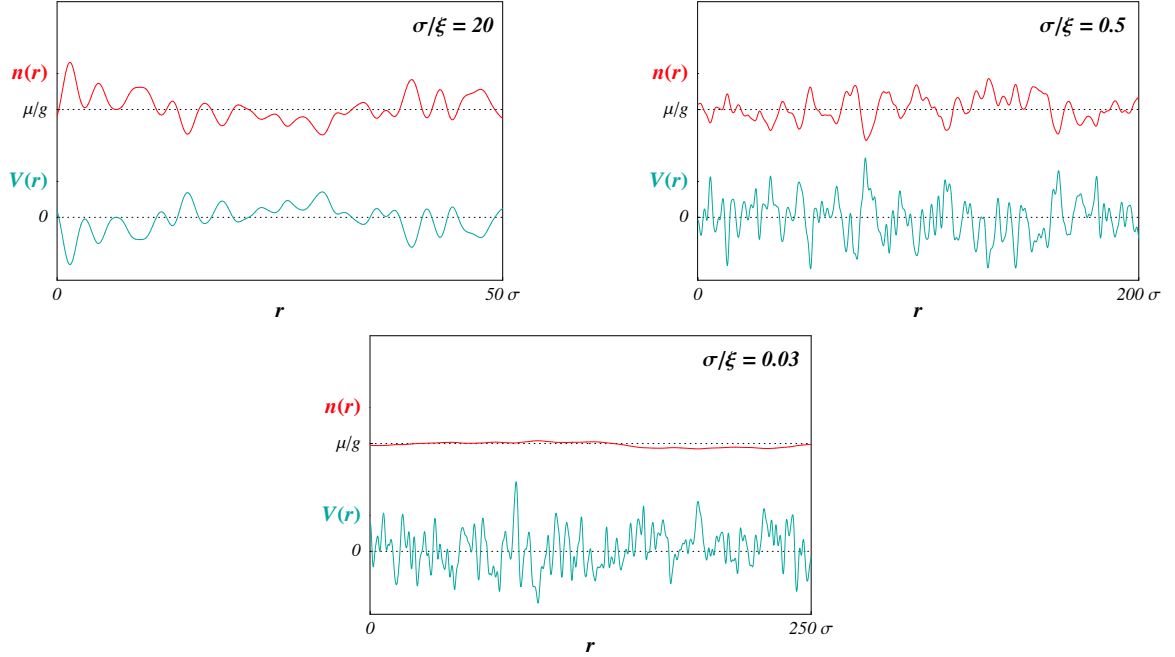


Abbildung 7: Gauß-korrelierte Unordnungspotentiale und zugehörige Kondensatdichten für die Werte $\sigma/\xi = 20$, $\sigma/\xi = 0.5$ und $\sigma/\xi = 0.03$.

Somit treten in unserem System drei relevante Längenskalen auf, die für das Systemverhalten entscheidend sind. Dies sind die Kohärenzlänge ξ des Kondensats, die Korrelationslänge σ des Potentials und die Wellenlänge der Anregung $\frac{1}{k}$. Die Bedingung $\xi \ll \frac{1}{k}$ legt das Schall-Regime fest, das Verhältnis von ξ und σ entscheidet über die Gültigkeit der Thomas-Fermi-Näherung und hat, wie auch das Verhältnis von σ und $\frac{1}{k}$, zudem noch Auswirkungen auf die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit, wie sich im weiteren Verlauf noch zeigen wird.

3 Hydrodynamische Wellengleichung und Schallgeschwindigkeitskorrektur

In diesem Kapitel wird nun die klassische hydrodynamische Theorie, die im letzten Kapitel vorgestellt worden ist, herangezogen und für ein Kondensat mit Unordnungspotential verallgemeinert um für Anregungen mit kleinen Wellenzahlen, d.h. $\xi \ll \frac{1}{k}$, eine Korrektur zur Schallgeschwindigkeit zu erhalten. Dabei wird auf die Thomas-Fermi-Näherung (39) zurückgegriffen, d.h. im Rahmen dieser Beschreibung muss vorausgesetzt werden, dass die Kohärenzlänge wesentlich kleiner als die Korrelationslänge des Potentials ist. Somit ist von den drei das System charakterisierenden Größen, die Wellenlänge der Anregung $\frac{1}{k}$, die Korrelationslänge des Unordnungspotentials σ und die Kohärenzlänge ξ , Letztere die Kleinste. Des Weiteren soll das externe Potential klein im Vergleich zum chemischen Potential sein, $\frac{V}{\mu} \ll 1$, um Störungstheorie betreiben zu können. Während im theoretischen Teil dieses Kapitels die Darstellungen allgemein für d Dimensionen gehalten werden, erfolgt die konkrete Berechnung der Schallgeschwindigkeitskorrektur in einer Dimension. Diese Berechnung der Korrektur geschieht im Folgenden über die Berechnung der Selbstenergie des Systems im effektiven Medium und in Bornscher Näherung. Der Realteil der Selbstenergie liefert eine Korrektur zur Dispersionsrelation und somit auch zur Schallgeschwindigkeit. Dabei wird zunächst keine bestimmte Art von Unordnung festgelegt, d.h. die Autokorrelationsfunktion des Potentials wird allgemein gehalten mit Eigenschaften wie in Abschnitt 2.1 beschrieben. So lassen sich in bestimmten Grenzfällen sogar sehr einfache, analytische Ausdrücke für die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit angeben. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wird der Realteil der Selbstenergie im Fall einer Speckle-Unordnung berechnet. Denn aufgrund der Einfachheit der Korrelationsfunktion im k -Raum (Abb. 5), kann der Realteil vollständig analytisch berechnet werden, was beispielsweise im Fall der Gaußschen Unordnung nur numerisch möglich ist.

3.1 Wellengleichung und Selbstenergie

Ausgangspunkt bei der Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit sind hierbei die Kontinuitätsgleichung (21) und die Eulergleichung (27) für eine ideale, kompressible Flüssigkeit ohne Quantendruck, da $\xi \ll \frac{1}{k}$ vorausgesetzt wird. Durch Kombination dieser beiden Differentialgleichungen erster Ordnung erhält man eine Wellengleichung. Diese wird nun im ersten Abschnitt hergeleitet und daraufhin im Zweiten die Greensche Funktion und die Selbstenergie im effektiven Medium eingeführt um im weiteren Verlauf dadurch die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit berechnen zu können.

3.1.1 Herleitung der Wellengleichung

Es werden nun wieder kleine Fluktuationen $n = n_{TF}(\mathbf{r}) + \delta n$ und $\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \delta \varphi$ für die Dichte und Phase angenommen. Dabei wird die mittlere Dichte im externen Potential durch die Thomas-Fermi-Dichte $n_{TF} = \frac{\mu - V(\mathbf{r})}{g}$ beschrieben. Dies ist für $\xi \ll \sigma$ eine gute Näherung, wie wir in Abschnitt 2.6 gesehen haben (Abb. 7 links oben). Die Vorgehensweise ist vorerst ganz analog zu Abschnitt 2.5. Die Kontinuitätsgleichung (21)

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [n(\mathbf{r}, t) \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (43)$$

und die Eulergleichung für eine ideale, kompressible Flüssigkeit (27)

$$m \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + [\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \cdot \nabla] \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) \right\} = -\nabla[g n(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})] \quad (44)$$

werden zunächst in den Dichte- und Phasenfluktuationen δn und $\delta\varphi$ linearisiert. Durch Kombination der beiden Gleichungen erhält man somit die Wellengleichung im Ortsraum [19]:

$$m \left[c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \delta n = \nabla \cdot (V(\mathbf{r}) \nabla \delta n). \quad (45)$$

Dabei bezeichnet $c = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$ die Schallgeschwindigkeit des Systems ohne äußeres Potential. Nach Transformation der Gleichung in den k - ω -Raum (siehe Anhang A.3) ergibt sich:

$$m [\omega^2 - c^2 k^2] \delta n(\mathbf{k}, \omega) = - (2\pi)^{-d/2} \mathbf{k} \cdot \int d\mathbf{k}' [\delta n(\mathbf{k}', \omega) V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \mathbf{k}']. \quad (46)$$

Ohne äußeres Potential beschreibt diese Gleichung die Ausbreitung von Schallwellen in Form von ebenen Wellen mit der Dispersionsrelation $\omega = ck$. Der Störterm auf der rechten Seite von (46) beschreibt die Streuung am Potential [19] und ist proportional zu $V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'$, d.h. für $\mathbf{k} \perp \mathbf{k}'$ tritt keine Streuung am Potential auf.

3.1.2 Greensche Funktion und Selbstenergie im effektiven Medium

Nun führen wir die Greenschen Funktionen ein, die freie Greensche Funktion G_0 und die volle Greensche Funktion G . Über die iterative Lösung der Bewegungsgleichung für G gelangt man zur Bornschen Reihe. Diese kann im Unordnungsmittel zur Dyson-Gleichung umgeordnet werden, wodurch die Selbstenergie des Systems definiert wird.

Zunächst werden die Greenschen Funktionen des Systems in der üblichen Weise zur Lösung partieller Differentialgleichungen über die Bewegungsgleichung (45) definiert [20]:

$$m \left(c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G_0(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{d/2} \delta(\mathbf{r}) (2\pi)^{1/2} \delta(t), \quad (47)$$

$$\left\{ m \left(c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) - [(\nabla V(\mathbf{r})) \nabla + V(\mathbf{r}) \nabla^2] \right\} G(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{d/2} \delta(\mathbf{r}) (2\pi)^{1/2} \delta(t). \quad (48)$$

Dabei beschreibt $G_0(\mathbf{r}, t)$ die Dynamik der Anregungen ohne Potential, $G(\mathbf{r}, t)$ die mit Potential. Der Faktor $(2\pi)^{\frac{d+1}{2}}$ wurde eingeführt um eine Darstellung von G_0 im k - ω -Raum ohne lästige Vorfaktoren zu erhalten. Dies ändert natürlich nichts an den Systemeigenschaften, da dies einfach nur einer Multiplikation der Gleichung (45) mit einer Konstanten entspricht. $G_0(\mathbf{k}, \omega)$ erhält man nun durch Fourier-Transformation der Gl. (47):

$$G_0(\mathbf{k}, \mathbf{k}', \omega) = \frac{1}{m(\omega^2 - c^2 k^2) + i0^+} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (49)$$

G_0 ist diagonal in \mathbf{k} und \mathbf{k}' , da bereits im Ansatz von $G_0(\mathbf{r}, t)$ räumliche Translationsinvarianz vorausgesetzt worden ist.

Nach Fourier-Transformation von Gl. (48) in den k - ω -Raum erhält man folgende implizite Gleichung für $G(\mathbf{k}, \omega)$:

$$\underbrace{m(\omega^2 - c^2 k^2)}_{G_0^{-1}} G(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \underbrace{(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int d\mathbf{k}' [V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} G(\mathbf{k}', \omega) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}']}_{\mathcal{V}G}. \quad (50)$$

Das Faltungsintegral wird nun im Folgenden durch die kompaktere Notation $\mathcal{V}G$ abgekürzt. Explizit ausgeschrieben bezeichnet $\mathcal{V}G$ die Fourier-Transformierte des Produkts $\mathcal{V}'(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, t)$ mit $\mathcal{V}'(\mathbf{r}) = [(\nabla V(\mathbf{r}))\nabla + V(\mathbf{r})\nabla^2]$:

$$(\mathcal{V}G)(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}(\mathcal{V}'(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, t)). \quad (51)$$

Eine ausführliche Rechnung dieser Fourier-Transformation findet sich im Anhang A.4. Nun kann Gleichung (50) iterativ gelöst werden, was in einer Bornschen Reihe resultiert:

$$G = G_0 + G_0 \mathcal{V}G_0 + G_0 \mathcal{V}G_0 \mathcal{V}G_0 + \dots. \quad (52)$$

Hierbei bezeichnen die Produktschreibweisen ebenfalls Faltungsintegrale. Um Aussagen über die Schallgeschwindigkeit unabhängig von der konkreten Realisierung der Unordnung zu erhalten, muss, wie bereits erwähnt, über alle möglichen Unordnungsrealisierungen gemittelt werden. Dies führt zur gemittelten Greenschen Funktion [17]:

$$\bar{G} = G_0 + G_0 \bar{\mathcal{V}}G_0 + G_0 \bar{\mathcal{V}}G_0 \bar{\mathcal{V}}G_0 + \dots, \quad (53)$$

die durch Neuordnen zur sogenannten Dyson-Gleichung umgeschrieben werden kann [17]:

$$\bar{G} = G_0 + G_0 \Sigma \bar{G}. \quad (54)$$

Dabei bezeichnet Σ die Selbstenergie und enthält per Definition alle irreduziblen Beiträge von $\bar{\mathcal{V}} + \bar{\mathcal{V}}G_0\bar{\mathcal{V}} + \bar{\mathcal{V}}G_0\bar{\mathcal{V}}G_0\bar{\mathcal{V}} + \dots$. Gleichung (54) lässt sich auch schreiben als

$$\bar{G}^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma. \quad (55)$$

Da G_0 (Gl. (49)) im Nenner die ungestörte quadratische Dispersionsrelation enthält sieht man an Gl. (55), dass die Selbstenergie eine komplexe Korrektur zur Dispersionsrelation liefert. Eine imaginäre Korrektur bedeutet dabei eine endliche Lebensdauer der Schallwellen. Da wir uns hier aber für die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit interessieren, steht somit die

Berechnung des Realteils der Selbstenergie im Vordergrund. Dies soll nun Ziel des nächsten Abschnitts sein.

3.2 Korrektur zur Schallgeschwindigkeit

Nun erfolgt die Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in einer Dimension. Bei der Berechnung der Selbstenergie beschränken wir uns dabei auf die Bornsche Näherung, die für kleine Störungen eine gute Approximation ist. Die Selbstenergie Σ in Bornscher Näherung lautet somit:

$$\Sigma = \bar{\mathcal{V}} + \overline{\mathcal{V}G_0\mathcal{V}}. \quad (56)$$

Dabei ist $\bar{\mathcal{V}} \sim \bar{V}$ gleich Null, da der Mittelwert des Potentials \bar{V} gleich Null gesetzt werden kann (vgl. Abschnitt 2.1). Zu berechnen bleibt also noch der Beitrag $\overline{\mathcal{V}G_0\mathcal{V}}$, der in Integraldarstellung folgende Form annimmt:

$$(\overline{\mathcal{V}G_0\mathcal{V}})_{kk''} = \frac{1}{2\pi} \int dk' dk'' \left[k \cdot k' k'' \cdot k''' \overline{V_{k-k'} V_{k''-k'''}} \frac{1}{m(\omega^2 - c^2 k'^2) + i0^+} \delta(k' - k''') \right]. \quad (57)$$

Nun kann für $\overline{V_{k-k'} V_{k''-k'''}}$ die Korrelationsfunktion des Unordnungspotentials (4) aus Abschnitt 2.1

$$\overline{V_{k-k'} V_{k''-k'''}} = V_0^2 \sigma C((k - k')\sigma) \delta(k - k' + k'' - k''') \quad (58)$$

eingesetzt werden. Nach Auswertung der δ -Funktionen erhält man:

$$(\overline{\mathcal{V}G_0\mathcal{V}})_{kk} = \frac{V_0^2 \sigma}{2\pi} k^2 \int dk' \left[\frac{k'^2}{m(\omega^2 - c^2 k'^2) + i0^+} C((k - k')\sigma) \right]. \quad (59)$$

Dieser Ausdruck (59) ist somit diagonal in k und k'' , was durch die Unordnungsmittelung bedingt ist. Da man sich nur für den Realteil der Selbstenergie interessiert, spaltet man das Integral mittels der Plemelj-Sochozki-Relation $\frac{1}{x+i0^+} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x)$ [21] in Real- und Imaginärteil auf. \mathcal{P} bezeichnet dabei den Cauchyschen Hauptwert des Integrals. Des Weiteren führt (59) zu einer impliziten Gleichung für die Dispersionsrelation, da das auszuwertende Integral selbst noch von ω abhängt, was die volle Dispersionsrelation enthält. Geht man aber davon aus, dass die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit klein ist, so kann man für $\omega \approx ck$ mit $c = \sqrt{\frac{\mu}{m}}$ die ungestörte Dispersionsrelation annehmen. Die Korrektur zur Dispersionsrelation ist von der Ordnung V_0^2 und somit klein, was diese Näherung also rechtfertigt. In dieser On-Shell-Näherung und nach Einführung der dimensionslosen Größe $\kappa = k\xi$ ergibt sich der Realteil des Integrals zu:

$$\Re(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \mathcal{P} \int d\kappa' \left[\frac{\kappa'^2}{\kappa^2 - \kappa'^2} C((\kappa - \kappa') \frac{\sigma}{\xi}) \right]. \quad (60)$$

Alternativ hätte man auch eine Skalierung der Wellenzahl mit der Korrelationslänge σ statt mit ξ vornehmen können. Dies mag zunächst sinnvoller erscheinen, da die Selbstenergie, wie aus Gl. (59) ersichtlich ist, nicht von der Kohärenzlänge abhängt. Jedoch wird durch die Skalierung mit ξ später die Analogie bei den Entwicklungen in Abschnitt 4.4 deutlicher. Wie Gl. (54) zeigt, liefert der Realteil der Selbstenergie eine Korrektur zur Dispersionsrelation. Diese hängt nun wie folgt mit der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit zusammen:

$$m(\omega^2 - c^2 k^2) - \Re(\Sigma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{c^2 k^2 + \frac{\Re(\Sigma)}{m}}. \quad (61)$$

Die Entwicklung der Wurzel nach der Potentialstärke V_0 bis zur quadratischen Ordnung liefert:

$$\omega = \sqrt{c^2 k^2 + V_0^2 \frac{\Re'(\Sigma)}{m}} \approx ck \left(1 + \frac{V_0^2 \Re'(\Sigma)}{2\mu k^2} \right) = ck \left(1 + \frac{\Re(\Sigma)}{2\mu k^2} \right). \quad (62)$$

Dabei ist die Notation $\Re(\Sigma) = V_0^2 \Re'(\Sigma)$ verwendet worden um den kleinen Parameter V_0 explizit zu zeigen. Die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit ist somit:

$$c_{rel} = \frac{c - c_0}{c_0} = \frac{\Re(\Sigma)}{2\mu k^2}. \quad (63)$$

In den Abbildungen 8 und 9 ist jeweils die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit im Fall eines gauß-korrelierten Unordnungspotentials in Abhängigkeit von σ/ξ für verschiedene Werte von κ und in Abhängigkeit von κ für verschiedene Werte von σ/ξ dargestellt. Wie zu sehen ist, ergibt sich eine negative Schallgeschwindigkeitskorrektur.

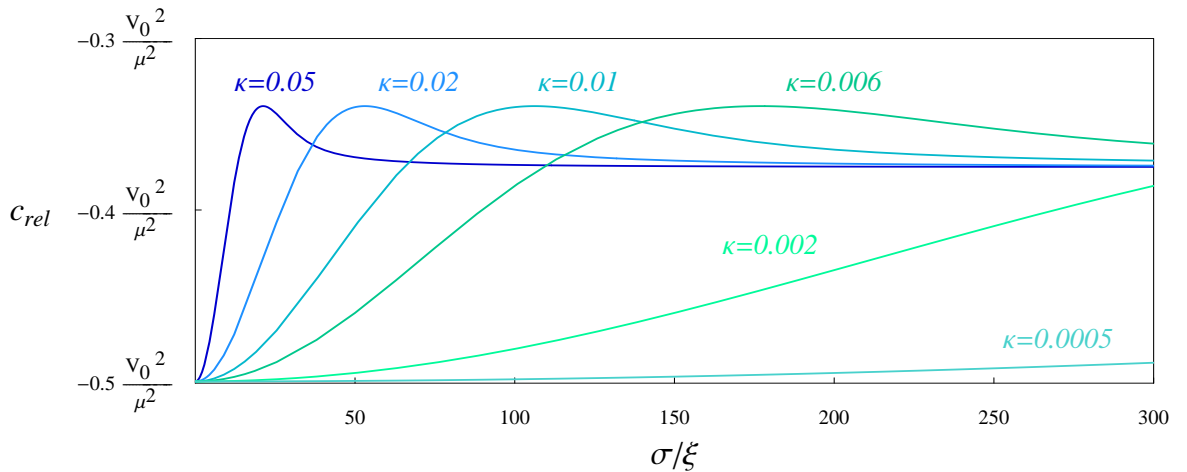


Abbildung 8: Relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für Gaußsche Unordnung in Abhängigkeit von σ/ξ für verschiedene Werte von κ .

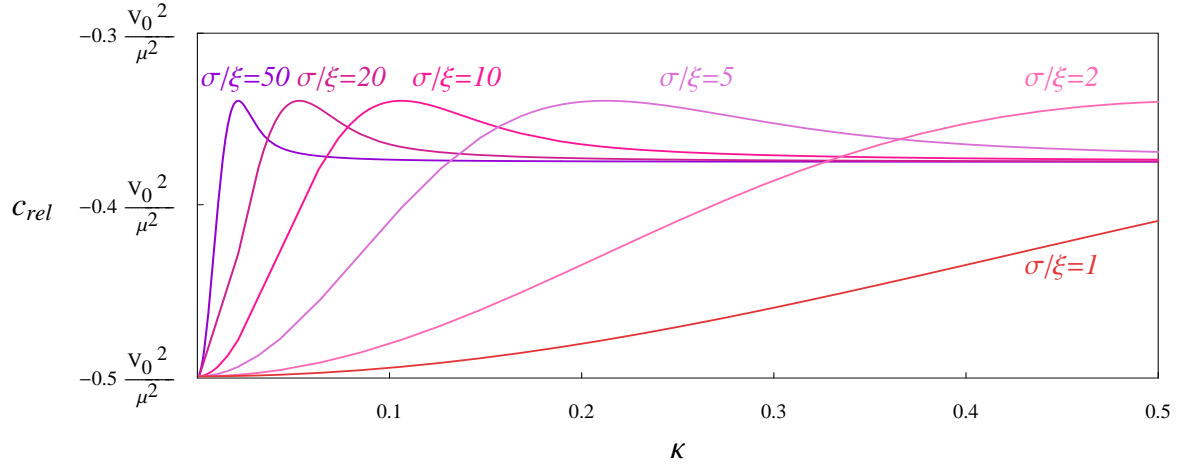


Abbildung 9: Relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für Gaußsche Unordnung in Abhängigkeit von κ für verschiedene Werte von σ/ξ .

In beiden Abbildungen lassen sich bereits unterschiedliche Regime der Schallgeschwindigkeitskorrektur ausmachen. Sowohl für große κ als auch für große σ/ξ konvergieren alle Kurven gegen einen konstanten Wert. In Abbildung 9 sieht man, dass die Kurven mit zunehmendem κ um so früher gegen diesen Wert konvergieren je größer σ/ξ ist. Genauso erkennt man in Abbildung 8, dass die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für zunehmende σ/ξ um so früher gegen diesen Wert konvergiert je größer κ ist. Des Weiteren lässt sich erkennen, dass die Graphen für kleine κ und σ/ξ alle den selben Startwert besitzen und um so länger bei diesem verharren, je kleiner κ bzw. σ/ξ ist. Was natürlich auch ins Auge sticht ist die Ähnlichkeit der beiden Abbildungen. Dies lässt darauf schließen, dass es einen Zusammenhang zwischen κ und σ/ξ gibt, der das Verhalten der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit charakterisiert. Dieses Verhalten wird im nächsten Abschnitt genauer untersucht, wobei sich in den oben angedeuteten Regimen einfache analytische Ausdrücke finden lassen.

3.3 Analytische Grenzfälle der Schallgeschwindigkeitskorrektur

Wie bereits erwähnt, soll die Kohärenzlänge die kleinste das System charakterisierende Größe darstellen um die Gültigkeit der hydrodynamischen Gleichungen zu gewährleisten. Die Bedingung $\xi \ll \frac{1}{k}$ ist bereits durch die Voraussetzung gegeben, dass man sich im Schall-Regime befindet. Also muss noch gelten, dass die Korrelationslänge σ des Potentials größer ist als ξ . Diese Bedingungen legen aber noch nicht das Verhältnis von σ und k fest. Daraus ergeben sich nun die beiden möglichen Fälle $\sigma \ll \frac{1}{k}$ und $\sigma \gg \frac{1}{k}$. Diese beiden Fälle charakterisieren zwei unterschiedliche Regime der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit, wie in den Abbildungen 8 und 9 zu sehen ist. Diese beiden Regime werden im Folgenden betrachtet.

1. $\sigma \ll \frac{1}{k}$

Zuerst betrachten wir den Fall, in dem σ kleiner ist als die Wellenlänge der Anregung. Um die Vorgehensweise bei den folgenden Entwicklungen zu veranschaulichen ist in Abbildung 10 der Integrand des Hauptwertintegrals (60) für $\sigma \ll \frac{1}{k}$ dargestellt. Dabei ist die Korrelationsfunktion separiert vom restlichen Integranden abgebildet. Zur graphischen Darstellung ist eine Gaußkurve als Korrelationsfunktion gewählt worden. Die

folgenden Entwicklungsschritte sind jedoch für alle Korrelationsfunktionen gültig, die die in Abschnitt 2.1 genannten, allgemeinen Eigenschaften besitzen.

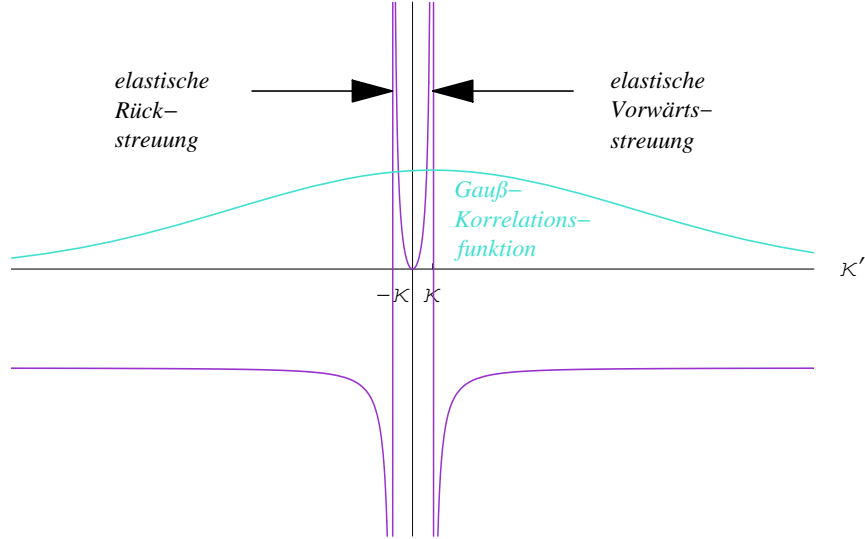


Abbildung 10: *Qualitative Darstellung des Integranden von (60) mit separat abgebildeter Korrelationsfunktion für $\sigma \ll \frac{1}{k}$.*

Der Integrand des Hauptwertintegrals besitzt zwei Pole bei $\kappa' = \kappa$ und $\kappa' = -\kappa$, an denen jeweils elastische Vorwärtstreuung bzw. Rückstreuung der Anregung am Potential auftritt. Die Korrelationsfunktion ist dabei zentriert um den Pol bei $\kappa' = \kappa$. Da $\kappa \ll 1$, liegt eine Entwicklung des Integranden für kleine κ nahe. Da aber auch die Korrelationslänge σ als sehr groß angenommen wird, $\sigma \gg \xi$, und somit die um $\kappa' = \kappa$ zentrierte Korrelationsfunktion sehr schmal ist, stellt sich nun die Frage, ob auch der Pol an der Stelle $\kappa' = -\kappa$ noch zum Integral beiträgt. Dies folgt aus der Bedingung $k\sigma \ll 1$. Denn, wie für die Korrelationsfunktion $C(\kappa\sigma/\xi)$ angenommen, zerfällt diese auf einer Skala $\sim \frac{\xi}{\sigma}$, soll also ab einem Wert $\kappa \gg \kappa_c \sim \frac{\xi}{\sigma}$ keinen Beitrag mehr liefern. Der Pol bei $\kappa' = -\kappa$ hat vom Maximum der Korrelationsfunktion den Abstand 2κ . Damit dieser also noch einen Beitrag zum Integral liefert, muss $2\kappa < \frac{\xi}{\sigma}$ gelten, was sich mit obiger Voraussetzung $\sigma \ll \frac{1}{k}$ deckt. Dies ist auch in Abbildung 10 deutlich zu erkennen. Solange $\sigma \ll \frac{1}{k}$ gilt, überdeckt die Korrelationsfunktion beide Pole gleichermaßen und somit tragen beide Pole zum Integral bei. D.h. für Korrelationslängen kleiner als die Wellenlänge tritt sowohl Vorwärts- als auch Rückstreuung der Anregung auf. Das Integral (60) wird nun für kleine κ entwickelt, insgesamt bis zur quadratischen Ordnung in κ , da die Korrektur zur quadratischen Dispersionsrelation $\omega^2 = c^2 k^2$ ebenfalls von der Ordnung k^2 sein soll. Da bereits κ^2 vor dem Integral steht, kann der Integrand einfach an der Stelle $\kappa = 0$ ausgewertet werden und es bleibt nur noch das Integral über die Korrelationsfunktion, das leicht auszuwerten ist:

$$\begin{aligned}
\Re(\Sigma) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \int d\kappa' C(\kappa' \frac{\sigma}{\xi}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \int d\kappa' dr \left[K(r) e^{-i\kappa' \frac{\sigma}{\xi} r} \right] \\
&= -\frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \int dr \left[2\pi \frac{\xi}{\sigma} \delta(r) K(r) \right] = -\frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \left[2\pi \frac{\xi}{\sigma} K(0) \right] \\
&= -\frac{V_0^2 \kappa^2}{\mu \xi^2}.
\end{aligned} \tag{64}$$

Mit (63) ergibt sich für die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit:

$$c_{rel} = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\mu^2}. \tag{65}$$

Genau dieser Wert wird in Abbildung 8 und 9 ganz links angenommen.

2. $\sigma \gg \frac{1}{k}$

In diesem Fall ist die Korrelationslänge größer als die Wellenlänge der Anregung. Aus dieser Bedingung folgt, dass der Pol des Hauptwertintegrals an der Stelle $\kappa' = -\kappa$ nicht mehr zum Integral beiträgt, da die Korrelationsfunktion sehr stark um $\kappa' = \kappa$ gepeakt ist und wegen $k\sigma \gg 1$ bereits vor dem Pol bei $\kappa' = -\kappa$ auf Null abgefallen ist. Dies ist auch deutlich in Abbildung 11 zu sehen, in der wiederum der Integrand von (60) mit der separat abgebildeten Korrelationsfunktion für $\sigma \gg \frac{1}{k}$ zu sehen ist.

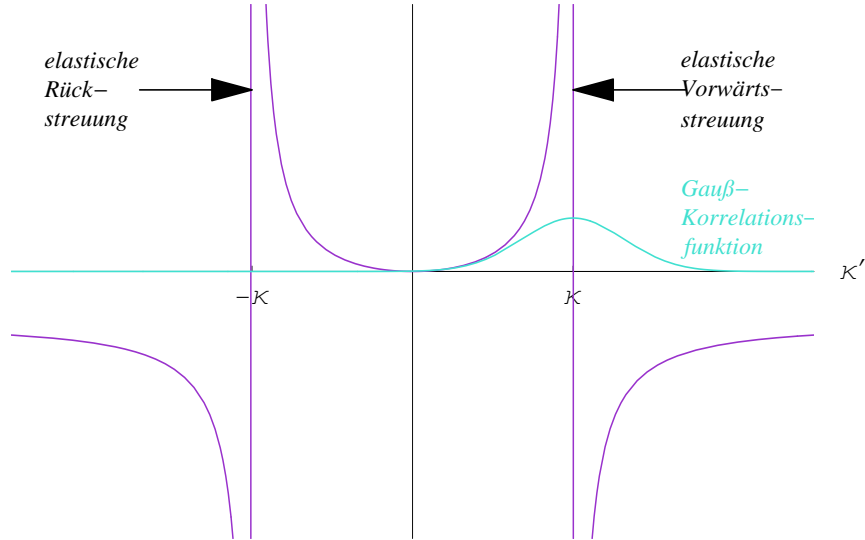


Abbildung 11: *Qualitative Darstellung des Integranden von (60) mit separat abgebildeter Korrelationsfunktion für $\sigma \gg \frac{1}{k}$.*

Bei Korrelationslängen größer als die Wellenlänge der Anregung tritt somit ausschließlich Vorwärtsstreuung auf. Für diesen Fall kann der Integrand in κ' um das Maximum

der Korrelationsfunktion bei $\kappa' = \kappa$ entwickelt werden. Mit der Substitution $x = \kappa - \kappa'$ erhält man zunächst:

$$\Re(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \int dx \left[\frac{(\kappa - x)^2}{2\kappa - x} \frac{1}{x} C\left(\frac{x\sigma}{\xi}\right) \right]. \quad (66)$$

Die Entwicklung des Integranden ausschließlich der Korrelationsfunktion und des Pols bei $x = 0$ bis zur linearen Ordnung in x um $x = 0$ liefert:

$$\Re(\Sigma) = \frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \int dx \left[\left(\frac{\kappa}{2} - \frac{3x}{4} + \mathcal{O}(x^2) \right) \frac{1}{x} C\left(\frac{x\sigma}{\xi}\right) \right]. \quad (67)$$

Da κ ebenfalls klein ist, tragen wieder nur Terme insgesamt bis zur quadratischen Ordnung in κ bei und man erhält für den Realteil der Selbstenergie:

$$\begin{aligned} \Re(\Sigma) &= -\frac{3}{4} \frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \int dx C\left(\frac{x\sigma}{\xi}\right) = -\frac{3}{4} \frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \int dx dr \left[K(r) e^{-ix\frac{\sigma}{\xi}r} \right] \\ &= -\frac{3}{4} \frac{1}{2\pi} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi^3} \kappa^2 \int dr \left[2\pi \frac{\xi}{\sigma} \delta(r) K(r) \right] \\ &= -\frac{3}{4} \frac{V_0^2}{\mu \xi^2} \kappa^2. \end{aligned} \quad (68)$$

Mit (63) bedeutet dies für die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit:

$$c_{rel} = -\frac{3}{8} \frac{V_0^2}{\mu^2}. \quad (69)$$

Wie in den Abbildungen 8 und 9 zu sehen ist, ist dies der Wert gegen den die Kurven für große σ/ξ bzw. große κ , d.h. $k\sigma \gg 1$, konvergieren.

In beiden Fällen verringert sich also die Schallgeschwindigkeit in Gegenwart von Unordnung, wie ja bereits in den Abbildungen 8 und 9 zu sehen war. Ist die Wellenlänge der Anregung kleiner als die Korrelationslänge des Potentials, tritt vorwiegend Vorwärtsstreuung der Anregung auf und die Abweichung von der Schallgeschwindigkeit ohne Potential ist betragsmäßig kleiner als im Fall langwelligerer Anregungen, bei denen auch Rückstreuung vorhanden ist. In Abbildung 12 ist die korrigierte Dispersionsrelation (62) $\epsilon(k)/\mu = \sqrt{2}\kappa[1 + \Re(\Sigma)\xi^2/(2\mu\kappa^2)]$ dargestellt. Der Realteil der Selbstenergie aus Gl. (60) ist dabei für eine gauß-korrelierte Unordnung $C((\kappa - \kappa')\sigma/\xi) = \exp(-(\kappa - \kappa')\sigma^2/(2\xi^2))$ numerisch berechnet worden. Ebenfalls dargestellt sind die analytischen Ergebnisse der betrachteten Grenzfälle, $\epsilon_1(\kappa)/\mu = \sqrt{2}\kappa(1 - 3V_0^2/(8\mu^2))$ für $\sigma \gg 1/k$ und $\epsilon_2(\kappa)/\mu = \sqrt{2}\kappa(1 - V_0^2/(2\mu^2))$ für $\sigma \ll 1/k$. Der Bereich $\sigma \ll 1/k$ ist in Abbildung 13 noch einmal vergrößert zu sehen. In den Darstellungen sind die Parameterwerte $\sigma/\xi = 20$ und $V_0/\mu = 0.8$ gewählt worden. Der relativ große Wert für V_0/μ dient hier

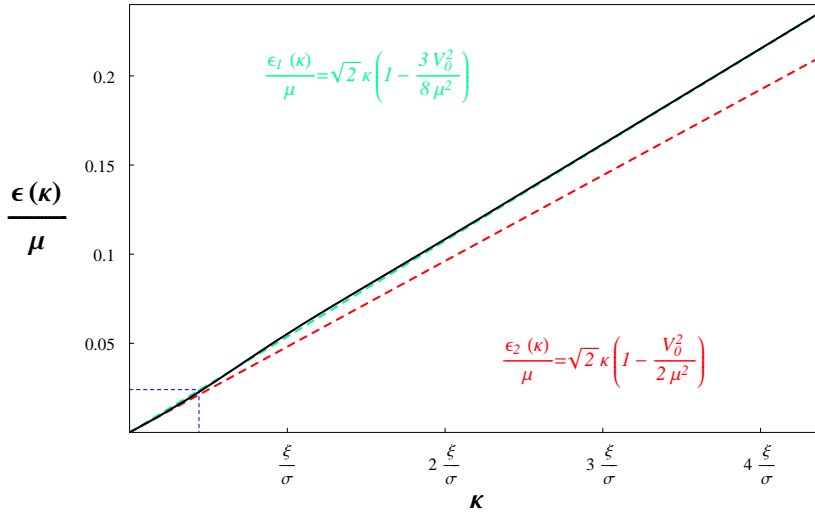


Abbildung 12:
Korrigierte
Dispersionsrelation
im Fall einer Gauß-
schen Unordnung und
die Grenzfälle $\sigma \ll 1/k$
(rot) und $\sigma \gg 1/k$
(grün) für $V_0/\mu = 0.8$.

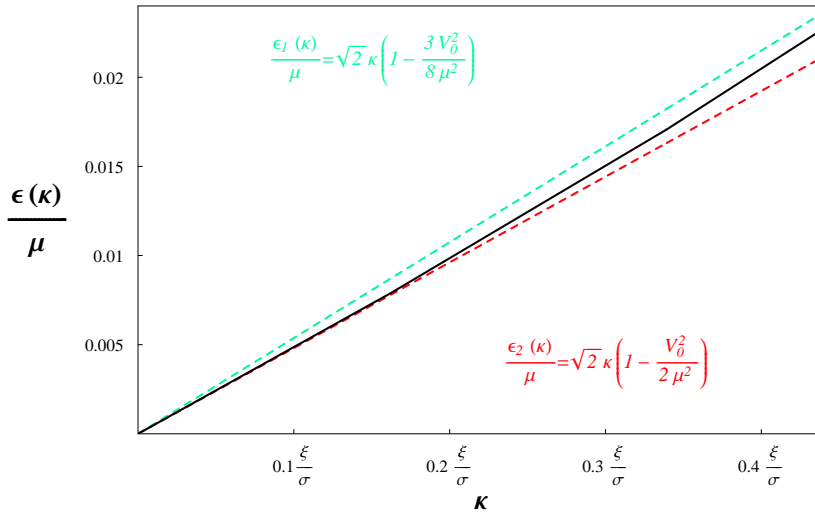


Abbildung 13:
Vergrößerte Dar-
stellung des Regimes
 $\sigma \ll 1/k$ (Markierter
Ausschnitt aus Abbil-
dung 12).

nur zu Darstellungszwecken, da die unterschiedlichen Geradensteigungen, die ja proportional zur Schallgeschwindigkeit sind, für einen wesentlich kleineren Wert von V_0/μ graphisch nicht mehr aufzulösen wären. Die Dispersionskurve $\epsilon(k)/\mu$ verläuft für $\kappa \ll \xi/\sigma$ auf der Geraden $\epsilon_2(\kappa)/\mu$ (Abb. 13) und geht für $\kappa \gg \xi/\sigma$ auf die Gerade $\epsilon_1(\kappa)/\mu$ über (Abb. 12). Man erkennt also deutlich den Übergang zwischen den beiden Regimen, die gekennzeichnet sind durch die unterschiedlichen Geradensteigungen und somit durch unterschiedliche Schallgeschwindigkeiten.

3.4 Berechnung der Schallgeschwindigkeit mit Speckle-Unordnung

Nun wird als Beispiel für eine Korrelationsfunktion die Speckle-Funktion betrachtet. Natürlich führt auch diese auf dieselben Ergebnisse in den oben genannten Grenzfällen, da sie die genannten Anforderungen an die allgemeine Korrelationsfunktion erfüllt. Aber aufgrund ihrer einfachen Struktur im k -Raum lässt sich der Realteil der Selbstenergie Gl. (60) ohne Näherungen sogar komplett analytisch integrieren. Da auch hier der Realteil der Selbstenergie unabhängig von ξ ist und es bei der Unterscheidung der beiden Grenzfälle nur auf die

Größenordnung des Produkts aus Wellenzahl k und Korrelationslänge σ ankommt, wird bei den folgenden Berechnungen die dimensionslose Größe $\alpha = k\sigma$ benutzt.

Die Speckle-Korrelationsfunktion im Ortsraum

$$\overline{V(r)V(r+r')} = V_0^2 \frac{\sin^2(\frac{r}{\sigma})}{(\frac{r}{\sigma})^2} \quad (70)$$

hat im k -Raum die Form:

$$\overline{V_k V_{k'}} = \pi V_0^2 \sigma \delta(k+k') \left(1 - \frac{|k|\sigma}{2}\right) \theta\left(1 - \frac{|k|\sigma}{2}\right). \quad (71)$$

Für den Realteil der Selbstenergie ergibt sich somit:

$$\Re(\Sigma) = \frac{V_0^2 \pi \alpha^2}{2 \pi \mu \sigma^2} \mathcal{P} \int d\alpha' \left[\frac{\alpha'^2}{\alpha^2 - \alpha'^2} \left(1 - \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}\right) \theta\left(1 - \frac{|\alpha - \alpha'|}{2}\right) \right]. \quad (72)$$

Die Stufenfunktion θ beschränkt das Integrationsintervall auf $[\alpha - 2; \alpha + 2]$. Somit erhält man:

$$\begin{aligned} \Re(\Sigma) &= \frac{V_0^2 \alpha^2}{2 \mu \sigma^2} \mathcal{P} \int_{\alpha-2}^{\alpha+2} d\alpha' \left(\frac{\alpha'^2}{\alpha^2 - \alpha'^2} - \frac{\alpha'^2}{\alpha^2 - \alpha'^2} \frac{|\alpha - \alpha'|}{2} \right) \\ &= \frac{V_0^2 \alpha^2}{2 \mu \sigma^2} \left\{ \mathcal{P} \int_{\alpha-2}^{\alpha+2} d\alpha' \frac{\alpha'^2}{\alpha^2 - \alpha'^2} - \frac{1}{2} \int_{\alpha-2}^{\alpha} d\alpha' \frac{\alpha'^2}{\alpha + \alpha'} + \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\alpha+2} d\alpha' \frac{\alpha'^2}{\alpha + \alpha'} \right\} \\ &= \frac{V_0^2 \alpha^2}{2 \mu \sigma^2} \left\{ \left[-\alpha' - \frac{\alpha}{2} \ln \left| \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha'} \right| \right]_{\alpha-2}^{\alpha+2} + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[-\alpha' - \frac{\alpha}{2} \ln \left| \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha + \alpha'} \right| \right]_{\alpha+\epsilon}^{\alpha-\epsilon} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left[-\alpha \alpha' + \frac{\alpha'^2}{2} + \alpha^2 \ln |\alpha + \alpha'| \right]_{\alpha-2}^{\alpha} + \frac{1}{2} \left[-\alpha \alpha' + \frac{\alpha'^2}{2} + \alpha^2 \ln |\alpha + \alpha'| \right]_{\alpha}^{\alpha+2} \right\} \\ &= \frac{V_0^2 \alpha^2}{2 \mu \sigma^2} \left\{ -2 - \frac{\alpha}{2} \ln \left| \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right| + \frac{\alpha^2}{2} \ln \left| \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{\alpha^2} \right| \right\}. \quad (73) \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist stetig, jedoch nicht differenzierbar an der Stelle $\alpha = 1$. Dies liegt an der Nicht-Differenzierbarkeit der Korrelationsfunktion $C(\alpha')$ an der Stelle $\alpha' = 2$. Die Speckle-Korrelationsfunktion $C(\alpha - \alpha') = \pi(1 - \frac{|\alpha - \alpha'|}{2})\theta(1 - \frac{|\alpha - \alpha'|}{2})$ ist in Abbildung 14 in Abhängigkeit von α' dargestellt. Die relevante, nicht stetig differenzierbare Stelle ist bei $\alpha' = \alpha - 2$ zu sehen. Die Pole an den Stellen $\alpha' = \pm\alpha$ sind durch schwarz-gestrichelte Linien angedeutet. Für $\alpha > 1$ trägt nur der Pol der Vorwärtsstreuung zum Integral bei, da die Korrelationsfunktion den Integranden bereits vor dem Pol der Rückstreuung abschneidet. Ab dem Wert $\alpha = 1$ trägt auch der Pol der Rückstreuung zum Integral bei und zwar aufgrund der Nicht-Differenzierbarkeit der Korrelationsfunktion sehr abrupt, was zur abrupten Änderung der Schallgeschwindigkeit bei $\alpha = 1$ führt. Des Weiteren ist daran zu erinnern, dass (73) nur für $\xi \ll \sigma$ Gültigkeit besitzt.

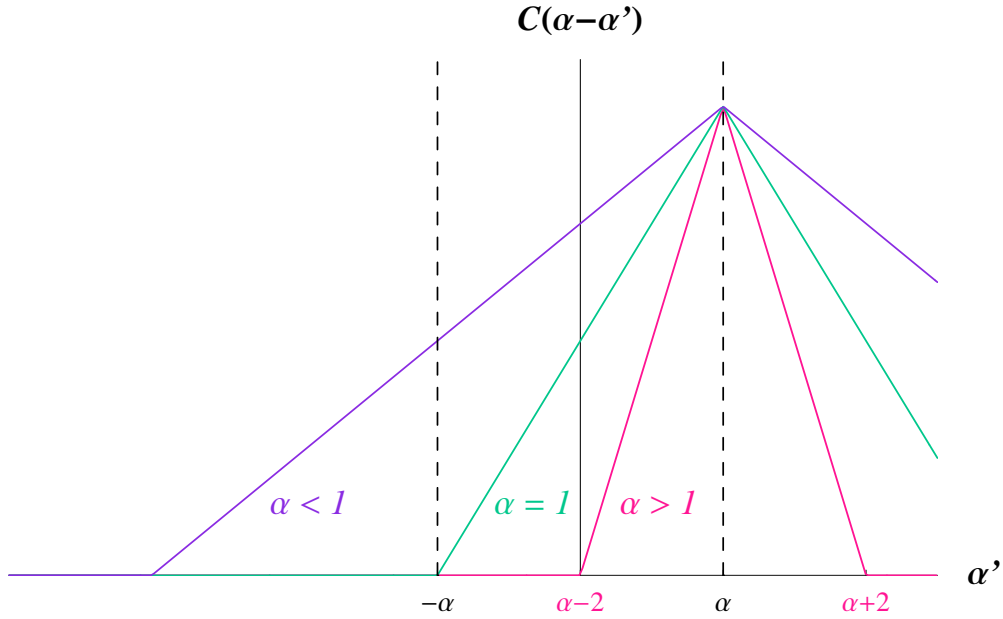


Abbildung 14: Speckle-Korrelationsfunktion $C(\alpha - \alpha')$ im k -Raum in Abhängigkeit von α' für verschiedene Werte von α .

Die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit kann man wiederum mittels Gl. (63) berechnen. Dass auch Gl. (73) die bereits berechneten Grenzfälle reproduziert, lässt sich durch folgende Entwicklungen leicht zeigen:

- Für $\alpha \ll 1$ kann man den Ausdruck um $\alpha = 0$ bis zur quadratischen Ordnung in α entwickeln. Dabei trägt nur der erste Term in der Klammer bei und man erhält für den Realteil von Σ und die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit:

$$\Re(\Sigma) = -\frac{V_0^2}{\mu} \frac{\alpha^2}{\sigma^2} = -\frac{V_0^2}{\mu} k^2 \quad \Rightarrow \quad c_{rel} = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\mu^2}. \quad (74)$$

- Für $\alpha \gg 1$ können die Logarithmen in $1/\alpha$ um 0 bis zur führenden Ordnung entwickelt werden um wieder eine in k quadratische Korrektur zur quadratischen Dispersionsrelation zu erhalten:

$$\begin{aligned} \Re(\Sigma) &= \frac{V_0^2}{2\mu} \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \left\{ -2 - \frac{\alpha}{2} \left[-\frac{2}{\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^2}\right) \right] + \frac{\alpha^2}{2} \left[-\frac{1}{\alpha^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha^3}\right) \right] \right\} \\ &= \frac{V_0^2}{2\mu} \frac{\alpha^2}{\sigma^2} \left(-\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{4} \frac{V_0^2}{\mu} k^2. \end{aligned} \quad (75)$$

Damit erhält man als relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit:

$$c_{rel} = -\frac{3}{8} \frac{V_0^2}{\mu^2}. \quad (76)$$

Somit ist die Konsistenz mit den vorher allgemein berechneten Grenzfällen bestätigt.

3.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Wir haben nun auf der Basis der hydrodynamischen Gleichungen, der Kontinuitätsgleichung und der Euler-Gleichung für eine ideale, kompressible Flüssigkeit, die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für kleine Unordnungsstärken mit allgemeiner Korrelationsfunktion berechnet und in Grenzfällen analytische Ausdrücke herleiten können. Voraussetzung ist dabei, dass die Kohärenzlänge ξ die Kleinste der drei relevanten Längenskalen ξ , σ und $\frac{1}{k}$ ist. Da diese Voraussetzung bereits im Ansatz enthalten ist (Thomas-Fermi-Näherung und Vernachlässigung des Quantendrucks) hängt die Korrektur der Schallgeschwindigkeit nicht mehr von der Kohärenzlänge ab, sondern nur noch vom Produkt $k\sigma$, wie sich bereits in den Abbildungen 8 und 9 angedeutet hat. Dadurch lassen sich in den Grenzfällen zwei Regime unterscheiden:

$$\begin{aligned} \bullet \quad k\sigma \ll 1 & \quad \Rightarrow \quad c_{rel} = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\mu^2} \\ \bullet \quad k\sigma \gg 1 & \quad \Rightarrow \quad c_{rel} = -\frac{3}{8} \frac{V_0^2}{\mu^2} \end{aligned}$$

In beiden Fällen ist die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit negativ und hängt nur von der Potentialstärke in Relation zum chemischen Potential ab. Des Weiteren haben wir gesehen, dass das Integral für eine Speckle-Unordnung (60) eine analytische Lösung besitzt. Die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit, die sich mit (63) und (73) daraus ergibt

$$c_{rel} = \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\mu^2} \left[-2 - \frac{k\sigma}{2} \ln \left| \frac{k\sigma - 1}{k\sigma + 1} \right| + \frac{(k\sigma^2)}{2} \ln \left| \frac{(k\sigma - 1)(k\sigma + 1)}{(k\sigma^2)} \right| \right] \quad (77)$$

hängt, abgesehen von V_0/μ , ebenfalls nur noch vom Produkt aus Wellenzahl und Korrelationslänge ab.

In Abbildung 15 sind die Ergebnisse dieses Kapitels graphisch zusammengefasst. Dargestellt sind die relativen Korrekturen zur Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von $k\sigma$. Zum Einen ist die Korrektur für eine Speckle-Unordnung dargestellt. Die Einführung des Parameters $\alpha = k\sigma$ hat es nun möglich gemacht, die in Abbildung 8 und 9 dargestellten Kurven, dort im Fall einer Gaußschen Unordnung, zu einer Kurve, hier im Fall eines Speckle-Potentials, zusammenzufassen. Zum Anderen sind die allgemeinen analytischen Korrekturen in den Grenzfällen $k\sigma \ll 1$ und $k\sigma \gg 1$ abgebildet. Die Grenze zwischen den beiden Regimen ist gegeben durch $k\sigma = 1$ und ist deutlich zu erkennen an der unendlichen Steigung der Speckle-Kurve an dieser Stelle. Man sieht auch, dass die Kurve für kleine $k\sigma$ mit der analytischen Lösung $c_{rel} = -V_0^2/(2\mu^2)$ übereinstimmt und nach einem Übergangsbereich für große $k\sigma$ von oben gegen die analytische Lösung $c_{rel} = -3V_0^2/(8\mu^2)$ konvergiert. Für $\sigma/\xi \rightarrow 0$, was für endliche Wellenzahlen gleichbedeutend mit $k\sigma \rightarrow 0$ ist, stimmt die Korrektur für die Speckle-Unordnung ebenfalls mit der analytischen Lösung für kleine $k\sigma$ überein. Jedoch müssen wir

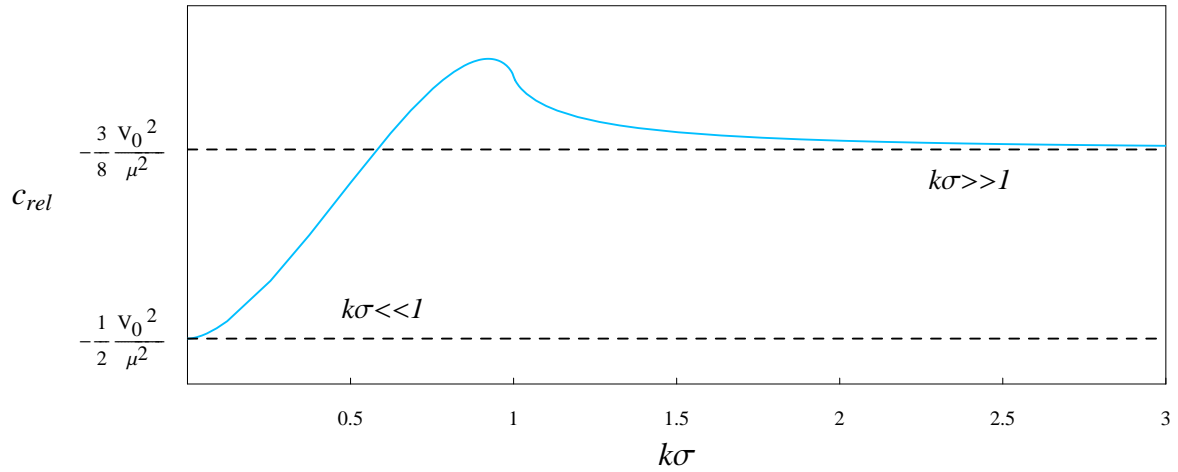


Abbildung 15: Relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit c_{rel} in Abhängigkeit von $k\sigma$. Dargestellt ist die Korrektur für eine Speckle-Unordnung (blau) und die allgemeinen analytischen Korrekturen in den Grenzfällen $k\sigma \ll 1$ und $k\sigma \gg 1$ (schwarz-gestrichelt).

davon ausgehen, dass diese Vorhersage nicht korrekt ist, da dieses Regime nicht mehr im Gültigkeitsbereich unserer Näherungen liegt (Thomas-Fermi-Näherung, siehe Abschnitt 2.6). Somit stellt sich die Frage wie die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für den Fall $\sigma \ll \xi$ aussieht. Diese Frage wird im nächsten Kapitel beantwortet, in dem ein anderer Zugang zur Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit gewählt wird, womit sich schließlich gültige Aussagen über alle drei Regime treffen lassen.

4 Entwicklung des Energiefunktionals und Schallgeschwindigkeitskorrektur

Inhalt dieses Kapitels ist eine verbesserte und verallgemeinerte Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit im Kondensat mit äußerem Unordnungspotential. Dies geschieht nun über die Entwicklung des Energiefunktionals (13). Auch hier gelangt man zu einem Ausdruck für die Selbstenergie, die eine Korrektur zur Dispersionsrelation liefert. Zunächst wird dabei der Hamilton-Operator des Systems aus dem großkanonischen Gross-Pitaevskii-Energiefunktional hergeleitet. Nach dem Aufstellen der Bewegungsgleichungen des Green-schen Operators wird wiederum über die Dyson-Gleichung die Selbstenergie Σ eingeführt. Bei der Berechnung dieser wird kurz auf den Imaginärteil von Σ und die Lebensdauer der Anregungen eingegangen. Das Hauptaugenmerk richtet sich jedoch auf den Realteil und die Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit. Auch hier lassen sich in Grenzfällen, die durch das Verhältnis der Korrelationslänge σ des Unordnungspotentials zur Kohärenzlänge ξ und das Verhältnis von σ zur Wellenlänge der Anregung charakterisiert sind, analytisch berechenbare Ergebnisse produzieren. Zusätzlich zu den in Abschnitt 3.3 betrachteten Grenzfällen lässt sich nun auch im Fall schwacher Wechselwirkung bzw. im Grenzfall eines δ -korrelierten Potentials $\sigma \ll \xi$ eine Aussage über die Schallgeschwindigkeitskorrektur machen.

4.1 Herleitung des Bogoliubov-Hamilton-Operators

Ziel dieses Abschnitts ist es den Hamiltonian für unser System herzuleiten. Zu diesem Zweck entwickelt man das großkanonische Energiefunktional um seinen Sattelpunkt zum Einen für kleine Dichte- und Phasenfluktuationen und zum Anderen für kleine Potentialstärken. Anschließend führt man eine Bogoliubov-Transformation durch, was letztendlich den relevanten Hamilton-Operator liefert.

Ausgangspunkt ist das großkanonische Energiefunktional (13):

$$E(\psi) = \int d\mathbf{r} \left[\frac{\hbar^2}{2m} |\nabla\psi(\mathbf{r})|^2 + (V(\mathbf{r}) - \mu) |\psi(\mathbf{r})|^2 + \frac{1}{2} g |\psi(\mathbf{r})|^4 \right]. \quad (78)$$

Drückt man die Wellenfunktion wieder durch ihre Amplitude und Phase aus (Gl. (22)) erhält man das Energiefunktional in Abhängigkeit der Teilchendichte $n(\mathbf{r}, t)$ und Phase $\varphi(\mathbf{r}, t)$ [19]

$$E(n, \varphi) = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} [(\nabla\sqrt{n})^2 + n(\nabla\varphi)^2] + (V - \mu)n + \frac{g}{2}n^2 \right\}. \quad (79)$$

Im Folgenden wird dieses Funktional um das Minimum bei n_0 und φ_0 , der Grundzustandsdichte und -phase, entwickelt. Dazu nimmt man kleine Abweichungen δn und $\delta\varphi$ von n_0 und φ_0 an, entwickelt das Funktional bis zur zweiten Ordnung in δn und $\delta\varphi$ und führt anschließend eine Entwicklung in V bis zur linearen Ordnung durch. Zunächst müssen jedoch n_0 und φ_0 bestimmt werden. Die Grundzustandsdichte n_0 und -phase φ_0 minimieren das Energiefunktional und erfüllen somit die Gleichungen

$$\left. \frac{\delta E}{\delta n} \right|_{n_0, \varphi_0} = 0 \quad \text{und} \quad \left. \frac{\delta E}{\delta \varphi} \right|_{n_0, \varphi_0} = 0. \quad (80)$$

Dies führt auf folgende Bedingungsgleichungen für n_0 und φ_0 [19]:

$$\left. \frac{\delta E}{\delta \varphi} \right|_{n_0, \varphi_0} = -\frac{\hbar^2}{m} \nabla(n_0 \nabla \varphi_0) = 0, \quad (81)$$

$$\left. \frac{\delta E}{\delta n} \right|_{n_0, \varphi_0} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\nabla^2 \sqrt{n_0}}{\sqrt{n_0}} - (\nabla \varphi_0)^2 \right) + V - \mu + g n_0 = 0. \quad (82)$$

An Gl. (81) sieht man, dass diese Bedingungen für eine räumlich homogene Phase $\nabla \varphi_0 = 0$ immer erfüllt ist, d.h. genau dann, wenn das Geschwindigkeitsfeld des Kondensats $\mathbf{v} = \frac{\hbar}{m} \nabla \varphi$ identisch Null ist. Bedingung (82) reduziert sich somit auf [19]

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 \sqrt{n_0}}{n_0} + g n_0 = \mu - V. \quad (83)$$

Für kleine Potentialstärken kann man davon ausgehen, dass die Grundzustandsdichte mit Potential nur wenig von der ohne Potential $n_\infty = \frac{\mu}{g}$ abweicht. Somit kann man die Grundzustandsdichte bis zur linearen Ordnung in V entwickeln $n_0(V) = n_\infty + \delta n(V)$. Einsetzen in (83) und Linearisieren in δn liefert die Grundzustandsdichte in Abhängigkeit des externen Potentials [22]:

$$n_0(\mathbf{r}) = n_\infty [1 - \tilde{v}(\mathbf{r})]. \quad (84)$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{v}(\mathbf{r}) = \frac{\tilde{V}(\mathbf{r})}{\mu}$ das geglättete Potential mit der Fouriertransformierten

$$\tilde{v}_{\mathbf{k}} = \frac{\frac{V_{\mathbf{k}}}{\mu}}{1 + \frac{k^2 \xi^2}{2}}. \quad (85)$$

Würde man in der Gleichung (83) den ersten Term auf der linken Seite, der die kinetische Energie beschreibt, vernachlässigen, so erhielte man für n_0 wieder die Thomas-Fermi-Dichte (39). Somit wird klar, dass durch die Berücksichtigung des kinetischen Beitrags in Gleichung (83) diese Beschreibung der Grundzustandsdichte über die Thomas-Fermi-Näherung hinausgeht und dass somit auch das Regime $\sigma \ll \xi$ unseres Systems zugänglich wird. Dies ist auch anschaulich zu verstehen, betrachtet man Gl. (84) und Gl. (85). Gleichung (84) hat formal das Aussehen der Thomas-Fermi-Dichte. Doch steht hier an Stelle des Potentials $V(\mathbf{r})$ das geglättete Potential $\tilde{v}(\mathbf{r})$. Diese Glättung des Potentials kommt sehr gut in der k -Raum-Darstellung (85) zum Ausdruck. Für die kleinen k -Moden des Potentials ($k\xi \ll 1$) gilt $\tilde{v}_{\mathbf{k}} \approx V_{\mathbf{k}}/\mu$ und Gleichung (84) geht in die Thomas-Fermi-Näherung über. Die k -Komponenten des Potentials $k\xi \gg 1$ werden jedoch wie $1/(k\xi)^2$ unterdrückt. D.h., variiert das Potential auf sehr großen Längenskalen ($\sigma \gg \xi$), so folgt die Teilchendichte dem Potential spiegelbildlich

wie in Thomas-Fermi-Näherung, was eine gute Beschreibung der Dichte ist, wie wir bereits gesehen haben (Abb. 7 oben links). Variiert das Potential auf sehr kurzen Längenskalen ($\sigma \ll \xi$) so folgt nach Gleichung (84) die Dichte einem geglätteten Potentialverlauf. Dass dies ebenfalls eine realistische Beschreibung ist, zeigt sich in den Abbildungen 7 oben rechts und unten. Diese Beschreibung der Grundzustandsdichte besitzt also auch im Bereich $\sigma \ll \xi$ Gültigkeit. Der Glättungseffekt des Potentials hat aber auch noch eine andere Konsequenz: Die für die Störungsrechnung relevante Forderung $V \ll \mu$ kann im Bereich $\sigma \ll \xi$ zur Forderung $\tilde{V} \ll \xi$ abgeschwächt werden [22].

Nun widmen wir uns der Entwicklung des Energiefunktionalen. Wie bereits beschrieben, wird dieses zunächst bis zur quadratischen Ordnung in den Fluktuationen δn und $\delta\varphi$ entwickelt [19]:

$$E[\delta n, \delta\varphi] = E_0 + F[\delta n, \delta\varphi] \quad (86)$$

mit

$$F[\delta n, \delta\varphi] = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{4m} \left[\left(\nabla \frac{\delta n}{n_0} \right)^2 + \frac{(\nabla^2 n_0)}{\sqrt{n_0}^3} \delta n^2 + 4n_0 (\nabla \delta\varphi)^2 \right] + g \delta n^2 \right\}. \quad (87)$$

Unter Verwendung von Gl. (84) wird $F[\delta n, \delta\varphi]$ bis zur linearen Ordnung in $\tilde{v}(\mathbf{r})$ entwickelt. Inwiefern diese Ordnung ausreichend ist wird später in Kapitel 5 im Abschnitt zur Ergänzung der Theorie 5.4 noch genauer diskutiert. Denn, da die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit von der Ordnung V_0^2 ist, wäre hier für eine konsistente Störungsrechnung auch eine Entwicklung des Funktionalen (87) bis zur zweiten Ordnung in $\tilde{v}(\mathbf{r})$ nötig. Doch vorerst nehmen wir diese Vernachlässigung in Kauf und, wie sich zeigen wird, gelangt man zu einer sehr guten Vorhersage, was die Schallgeschwindigkeitskorrektur betrifft. Zunächst jedoch erhält man nach einer etwas längeren Rechnung:

$$F(\tilde{v}) = F^{(0)} + F^{(1)}(\tilde{v}) \quad (88)$$

mit

$$F^{(0)}[\delta n, \delta\varphi] = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{(\nabla \delta n)^2}{4n_\infty} + n_\infty (\nabla \delta\varphi)^2 \right] + \frac{g}{2} \delta n^2 \right\}, \quad (89)$$

$$F^{(1)}[\delta n, \delta\varphi] = \int d\mathbf{r} \left\{ \tilde{v}(\mathbf{r}) \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{(\nabla \delta n)^2 - \nabla^2 \delta n^2}{4n_\infty} - n_\infty (\nabla \delta\varphi)^2 \right] \right\}. \quad (90)$$

In Fourier-Darstellung sehen (89) und (90) dabei wie folgt aus:

$$F^{(0)}[\delta n, \delta\varphi] = \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{1}{4n_\infty} \delta n_{\mathbf{k}} \delta n_{-\mathbf{k}} + n_\infty \delta\varphi_{\mathbf{k}} \delta\varphi_{-\mathbf{k}} \right) + \frac{g}{2} \delta n_{\mathbf{k}} \delta n_{-\mathbf{k}} \right] \quad (91)$$

$$F^{(1)}[\delta n, \delta\varphi] = \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \tilde{v}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{k^2 + k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}'}{4n_\infty} \delta n_{-\mathbf{k}} \delta n_{\mathbf{k}'} + n_\infty \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \delta\varphi_{-\mathbf{k}} \delta\varphi_{\mathbf{k}'} \right\}. \quad (92)$$

Dabei haben wir zunächst eine endliche Systemgröße angenommen. Später werden wir jedoch ein ausreichend großes System annehmen um von der Summation zur Integration übergehen zu können. Nun wird eine Bogoliubov-Transformation durchgeführt. Diese ist wie folgt definiert [19]:

$$i \delta\varphi_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{\frac{a_{\mathbf{k}}}{2}} (\gamma_{\mathbf{k}} - \gamma_{-\mathbf{k}}^*), \quad \delta n_{\mathbf{k}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2a_{\mathbf{k}}}} (\gamma_{\mathbf{k}} + \gamma_{-\mathbf{k}}^*) \quad (93)$$

mit den Abkürzungen $a_{\mathbf{k}} = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{2n_\infty \epsilon_{\mathbf{k}}^0}$, $\epsilon_{\mathbf{k}}^0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ und $\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^0(\epsilon_{\mathbf{k}}^0 + 2\mu)}$. Die Bogoliubov-Transformation ist genau so konstruiert, dass die neuen komplexen Feldamplituden γ und γ^* ebenfalls kanonisch konjugierte Variablen sind, wie auch δn und $\delta\varphi$. Des Weiteren sind die Koeffizienten genau so gewählt, dass $F^{(0)}$ nach der Transformation diagonal in γ und γ^* ist. Zudem kann man durch kanonische Quantisierung von den komplexen Feldamplituden zu den Erzeugern und Vernichtern γ^\dagger und γ übergehen und erhält somit den für unser System relevanten Hamiltonian:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}}^\dagger) + \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'} + \gamma_{-\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}'}^\dagger) \\ &+ \frac{1}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} Y_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} (\gamma_{-\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}'} + \gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k}'}^\dagger), \end{aligned} \quad (94)$$

wobei die Erzeuger und Vernichter die bosonischen Kommutatorrelationen erfüllen:

$$[\gamma_{\mathbf{k}}, \gamma_{\mathbf{k}'}] = [\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger, \gamma_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \quad \text{und} \quad [\gamma_{\mathbf{k}}, \gamma_{\mathbf{k}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}. \quad (95)$$

Der erste Term auf der rechten Seite von (94) beschreibt das System ohne Potential, d.h. Anregungen mit dem uns bereits bekannten Bogoliubov-Anregungsspektrum $\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\epsilon_{\mathbf{k}}^0(\epsilon_{\mathbf{k}}^0 + 2\mu)}$ (vgl. Abschnitt 2.5). Durch das externe Potential treten nun noch zwei weitere Terme auf. Der zweite Term auf der rechten Seite beschreibt die Streuung der Teilchen vom Zustand \mathbf{k} ins Kondensat und aus dem Kondensat in den Zustand \mathbf{k}' mit der Amplitude $W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Der letzte Term beschreibt die Erzeugung bzw. die Vernichtung von Anregungspaaren mit der Amplitude $Y_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$. Die Amplituden besitzen dabei folgende Form:

$$W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{\hbar^2}{8m} \tilde{v}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^0 \epsilon_{\mathbf{k}'}^0}{\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}'}}} (k^2 + k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') - \sqrt{\frac{\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}'}}{\epsilon_{\mathbf{k}}^0 \epsilon_{\mathbf{k}'}^0}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right), \quad (96)$$

$$Y_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} = \frac{\hbar^2}{8m} \tilde{v}_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \left(\sqrt{\frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^0 \epsilon_{\mathbf{k}'}^0}{\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}'}}} (k^2 + k'^2 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') + \sqrt{\frac{\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}'}}{\epsilon_{\mathbf{k}}^0 \epsilon_{\mathbf{k}'}^0}} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right). \quad (97)$$

Die Darstellungen dieses Abschnitts basieren vorwiegend auf [19]. Der Hamiltonian in [19] berücksichtigt jedoch nur den “ W -Term”, d.h. normale Streuprozesse, und zudem noch mit der Einschränkung auf elastische Streuung und nicht, wie hier dargestellt, auch den “ Y -Beitrag”. Dieser Hamiltonian soll nun unser System beschreiben und liefert die Bewegungsgleichungen, die im nächsten Abschnitt behandelt werden.

4.2 Bewegungsgleichungen und Greensche Operatoren

Zunächst werden die Bewegungsgleichungen der Erzeuger und Vernichter $\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger$ und $\gamma_{\mathbf{k}}$ aufgestellt. Anschließend werden retardierte Greensche Operatoren definiert, deren Bewegungsgleichungen in einer Blockmatrixdarstellung zu einer Bewegungsgleichung für einen Matrix-Propagator zusammengefasst werden können. Analog zu Abschnitt 3.1.2 kommt man durch Iteration dieser Bewegungsgleichung zur Bornschen Reihe für den Matrix-Propagator. Auch hier wird über die Umordnung dieser Reihe zur Dyson-Gleichung letztendlich die Selbstenergie des Systems definiert.

Die Bewegungsgleichungen für die Erzeuger und Vernichter ergeben sich aus dem Kommutator mit dem Hamilton-Operator (94)

$$i\hbar \frac{\partial \gamma_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} = [\gamma_{\mathbf{k}}(t), H], \quad i\hbar \frac{\partial \gamma_{-\mathbf{k}}^\dagger(t)}{\partial t} = [\gamma_{-\mathbf{k}}^\dagger(t), H] \quad (98)$$

und lauten somit:

$$i\hbar \dot{\gamma}_{\mathbf{k}}(t) = \epsilon_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}}(t) + \frac{2}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{k}''} W_{\mathbf{k}\mathbf{k}''} \gamma_{\mathbf{k}''}(t) + \frac{2}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{k}''} Y_{\mathbf{k}\mathbf{k}''} \gamma_{-\mathbf{k}''}^\dagger(t), \quad (99)$$

$$i\hbar \dot{\gamma}_{-\mathbf{k}}^\dagger(t) = -\epsilon_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}}^\dagger(t) - \frac{2}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{k}''} W_{\mathbf{k}\mathbf{k}''} \gamma_{-\mathbf{k}''}^\dagger(t) - \frac{2}{L^{d/2}} \sum_{\mathbf{k}''} Y_{\mathbf{k}\mathbf{k}''} \gamma_{\mathbf{k}''}(t). \quad (100)$$

Ziel ist es nun Greensche Operatoren zu finden, die die Dynamik unseres Systems beschreiben. Dazu definiert man sich zunächst in üblicher Weise [20] den retardierten Greenschen Operator über den Kommutator der Erzeuger und Vernichter:

$$G(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t, t') \equiv -\frac{i}{\hbar} \theta(t - t') \left\langle [\gamma_{\mathbf{k}}(t), \gamma_{\mathbf{k}'}^\dagger(t')] \right\rangle. \quad (101)$$

Um nun für G eine Bewegungsgleichung zu finden bildet man die Zeitableitung von G unter Verwendung der Bewegungsgleichungen (99) und (100). Da aber — wie aus diesen ersichtlich ist — die Bewegungsgleichungen für γ und γ^\dagger koppeln, ist die Bewegungsgleichung von G ebenfalls an andere Greensche Operatoren gekoppelt. Dies hat die Einführung weiterer Greenscher Operatoren zur Folge:

$$G^\dagger(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t, t') \equiv -\frac{i}{\hbar} \theta(t - t') \left\langle [\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger(t), \gamma_{\mathbf{k}'}(t')] \right\rangle, \quad (102)$$

$$F(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t, t') \equiv -\frac{i}{\hbar} \theta(t - t') \left\langle [\gamma_{-\mathbf{k}}(t), \gamma_{\mathbf{k}'}(t')] \right\rangle, \quad (103)$$

$$F^\dagger(\mathbf{k}, \mathbf{k}', t, t') \equiv -\frac{i}{\hbar} \theta(t - t') \left\langle [\gamma_{-\mathbf{k}}^\dagger(t), \gamma_{\mathbf{k}'}^\dagger(t')] \right\rangle. \quad (104)$$

Diese lassen sich nun zu einem Matrix-Propagator zusammenfassen:

$$\underline{G} \equiv \begin{pmatrix} G & F \\ F^\dagger & G^\dagger \end{pmatrix}. \quad (105)$$

Somit lassen sich die Bewegungsgleichungen in geschlossener Form in Matrixdarstellung angeben:

$$i \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{\underline{G}} = \delta(t - t') \mathbb{1} + \left\{ \underline{\epsilon} + \frac{2}{L^{d/2}} \begin{pmatrix} W & Y \\ Y & W \end{pmatrix} \right\} \underline{G} \quad (106)$$

mit $(\underline{\epsilon})_{k,k'} = \epsilon_k \delta_{k,k'}$. Diese Bewegungsgleichung für \underline{G} hat nach Fourier-Transformation in den ω -Raum die Gestalt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} (G_0^+)^{-1} & 0 \\ 0 & (G_0^-)^{-1} \end{pmatrix}}_{G_0^{-1}} \underline{G} = \mathbb{1} + \underbrace{\frac{2}{L^{d/2}} \begin{pmatrix} W & Y \\ Y & W \end{pmatrix}}_{\mathcal{V}} \underline{G}. \quad (107)$$

Dabei bezeichnen G_0^+ und G_0^- die freien Propagatoren des Systems ohne Unordnungspotential:

$$(G_0^+)_{kk'} \equiv \frac{1}{\hbar\omega - \epsilon_k + i0^+} \delta_{k,k'}, \quad (G_0^-)_{kk'} \equiv \frac{1}{-\hbar\omega - \epsilon_k + i0^+} \delta_{k,k'}. \quad (108)$$

Auch hier kann \underline{G} durch Iteration der Gleichung (107) als Bornsche Reihe geschrieben werden:

$$\underline{G} = G_0 + G_0 \mathcal{V} G_0 + G_0 \mathcal{V} G_0 \mathcal{V} G_0 + \dots \quad (109)$$

mit G_0 und \mathcal{V} wie in (107) definiert. Nun muss wieder über alle Unordnungsrealisierungen gemittelt werden um den Matrix-Propagator im effektiven Medium zu erhalten:

$$\overline{\underline{G}} = G_0 + G_0 \overline{\mathcal{V}} G_0 + G_0 \overline{\mathcal{V}} G_0 \overline{\mathcal{V}} G_0 + \dots \quad (110)$$

Dies führt dazu, dass sich diese Reihe wieder im Rahmen der diagrammatischen Störungstheorie zur Dyson-Gleichung ordnen lässt:

$$\overline{G} = G_0 + G_0 \Sigma \overline{G} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{G}^{-1} = G_0^{-1} - \Sigma. \quad (111)$$

Σ bezeichnet hier wieder die Selbstenergie, die alle irreduziblen Beiträge von $\overline{\mathcal{V}} + \overline{\mathcal{V}G_0\mathcal{V}} + \overline{\mathcal{V}G_0\mathcal{V}G_0\mathcal{V}} + \dots$ enthält. Der nächste Abschnitt beschäftigt sich nun mit der Berechnung der Selbstenergie, deren erster Block wieder als Korrektur der Dispersionsrelation aufzufassen ist.

4.3 Selbstenergie

In diesem Abschnitt wird nun die Selbstenergie Σ in einer Dimension in Bornscher Näherung berechnet. Dabei wird kurz auf den Imaginärteil von Σ eingegangen, der die Lebensdauer der Anregungen beschreibt. Im Vordergrund steht aber der Realteil von Σ und die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit. Dabei wird ein allgemeiner Ausdruck für den Realteil hergeleitet, der, wie auch die Schallgeschwindigkeitskorrektur, für eine konkrete Korrelationsfunktion des Unordnungspotentials numerisch berechnet werden kann. Es ergibt sich wieder eine negative Korrektur, die in Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Kapitel 3 steht.

Bei der Berechnung der Selbstenergie beschränkt man sich hier wieder auf die Bornsche Näherung, d.h. man berücksichtigt nur Terme bis zur Ordnung \mathcal{V}^2 . Der Term $\overline{\mathcal{V}} \sim \overline{V}$ liefert nach Voraussetzung (vgl. Kap. 2.1) keinen Beitrag. Hätte man das Funktional (87) bis zur zweiten Ordnung in V entwickelt, müsste man an dieser Stelle einen zusätzlichen Beitrag in $\overline{\mathcal{V}} \sim \overline{V^2}$ berücksichtigen (siehe Kap. 5.4). Aber hier bleibt nur der Ausdruck $\overline{\mathcal{V}G_0\mathcal{V}}$:

$$\overline{\mathcal{V}G_0\mathcal{V}} = \frac{4}{L^d} \left(\frac{\overline{WG_0^+W} + \overline{YG_0^-Y}}{\overline{YG_0^+W} + \overline{WG_0^-Y}} \frac{\overline{WG_0^+Y} + \overline{YG_0^-W}}{\overline{YG_0^+Y} + \overline{WG_0^-W}} \right). \quad (112)$$

So wie G_0^+ die Dispersionsrelation des ungestörten Systems beinhaltet, so beschreibt der normale Propagator \overline{G} (1. Zeile, 1. Spalte des gemittelten Matrix-Propagators \overline{G}) das Anregungsspektrum im Unordnungspotential. Somit ist der für uns relevante Beitrag der Matrixeintrag der 1. Zeile und 1. Spalte aus (112):

$$\Sigma_{11} = \frac{4}{L^d} \left(\overline{WG_0^+W} + \overline{YG_0^-Y} \right). \quad (113)$$

Unter der Annahme eines hinreichend großen Systems kann man von der diskreten Summation zur Integration übergehen. Mit der Abkürzung

$$W_{kk'} = A_{kk'} \tilde{v}_{k-k'} \quad (114)$$

lautet der erste Beitrag somit

$$\frac{2}{\pi} \overline{(WG_0^+W)}_{kk''} = \frac{2}{\mu^2 \pi} \int dk' dk'' \left[\frac{A_{kk'} A_{k''k''}}{1 + 1 \frac{\xi^2}{2} (k - k')^2} \frac{\overline{V_{k-k'} V_{k''-k''}}}{1 + 1 \frac{\xi^2}{2} (k'' - k'')^2} \frac{\delta(k' - k'')}{\hbar \omega - \epsilon_{k'} + i0^+} \right]. \quad (115)$$

Nach Einsetzen der allgemeinen Korrelationsfunktion im k -Raum (4) aus Abschnitt 2.1

$$\overline{V_k V_{k'}} = \delta(k + k') V_0^2 \sigma C(k \sigma) \quad (116)$$

können die δ -Funktionen ausgewertet werden. Des Weiteren verwendet man hier wieder die On-Shell-Näherung $\hbar \omega = \epsilon_k$, da auch hier die Korrektur zur Dispersionsrelation von der Ordnung V^2 und somit klein ist. Somit erhält man in einer Dimension:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \overline{(WG_0^+W)}_{kk} &= \frac{2V_0^2 \sigma}{\mu^2 \pi} \mathcal{P} \int dk' \frac{A_{kk'}^2}{\left[1 + \frac{\xi^2}{2} (k - k')^2\right]^2} \frac{C((k - k')\sigma)}{\epsilon_k - \epsilon_{k'}} \quad (117) \\ &- i \frac{2V_0^2 \sigma}{\mu^2} \int dk' \delta(\epsilon_{k'} - \epsilon_k) \frac{A_{kk'}^2}{\left[1 + \frac{\xi^2}{2} (k - k')^2\right]^2} C((k - k')\sigma). \end{aligned}$$

Das Integral ist dabei wieder mittels Plemelj-Sochozki-Relation [21] in Real- und Imaginärteil aufgeteilt worden. Mit dem Beitrag YG_0^-Y kann man analog verfahren:

$$\frac{2}{\pi} \overline{(YG_0^-Y)}_{kk} = \frac{2V_0^2 \sigma}{\mu^2 \pi} \int dk' \frac{B_{kk'}^2}{\left[1 + \frac{\xi^2}{2} (k - k')^2\right]^2} \frac{C((k - k')\sigma)}{-\epsilon_k - \epsilon_{k'}} \quad (118)$$

Dabei ist folgende Bezeichnung verwendet worden:

$$Y_{kk'} = B_{kk'} \tilde{v}_{k-k'}. \quad (119)$$

Der “ Y -Beitrag” ist rein reell, da der Integrand für $k \neq 0$ keinen Pol besitzt. Im Folgenden werden wir uns mit den Auswertungen dieser Integrale beschäftigen. Begonnen wird dabei mit dem Imaginärteil von Σ_{11} .

4.3.1 Imaginärteil der Selbstenergie

Der Imaginärteil kann über die Delta-Funktion leicht ausgewertet werden. Dazu benötigt man nur die Relation

$$\delta(f(x)) = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_i) \left| \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_i} \right|^{-1}. \quad (120)$$

Dabei sind die x_i die Nullstellen von $f(x)$. Damit erhält man

$$\delta(\epsilon_k - \epsilon_{k'}) = \delta(k' - k) \left| \frac{\partial \epsilon_{k'}}{\partial k'} \Big|_k \right|^{-1} + \delta(k' + k) \left| \frac{\partial \epsilon_{k'}}{\partial k'} \Big|_{-k} \right|^{-1} \quad (121)$$

$$= \frac{k \epsilon_k}{2 \epsilon_k^0 (\epsilon_k^0 + \mu)} [\delta(k - k') + \delta(k + k')]. \quad (122)$$

Für den Imaginärteil ergibt sich somit

$$\Im(\Sigma_{11}) = -\frac{2 V_0^2 \sigma}{\mu^2} \frac{k \epsilon_k}{2 \epsilon_k^0 (\epsilon_k^0 + \mu)} \left[A_{k,k}^2 C(0) + \frac{A_{k,-k}^2}{(1 + 2 \xi^2 k^2)^2} C(-2k\sigma) \right] \quad (123)$$

Nun wird wieder die dimensionslose Größe $\kappa = k\xi$ eingeführt. Mit den Amplituden $A_{\kappa,\kappa}$ bzw. $A_{\kappa,-\kappa}$ (siehe Anhang A.5)

$$A_{\kappa,\kappa}^2 = \frac{\mu^2}{4} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + 2} \quad A_{\kappa,-\kappa}^2 = \frac{\mu^2}{4} \frac{\kappa^2 (2\kappa^2 + 1)^2}{\kappa^2 + 2} \quad (124)$$

eingesetzt in (123) erhält man den Imaginärteil der Selbstenergie

$$\Im(\Sigma_{11}) = -\frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\mu} \frac{\sigma}{\xi} \frac{\kappa \sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}}{(\kappa^2 + 1)(\kappa^2 + 2)} \left[C(0) + C(-2\kappa \frac{\sigma}{\xi}) \right]. \quad (125)$$

Dieser ist in Einheiten des chemischen Potentials μ in Abhängigkeit von $\kappa = \xi k$ und für verschiedene Werte von σ/ξ für den Fall einer Gauß-Korrelationsfunktion in Abbildung 16 dargestellt.

Der Imaginärteil der Selbstenergie ist indirekt proportional zur Lebensdauer τ der Anregungen, $\Im(\Sigma) = -1/(2\tau)$. In Abbildung 16 sieht man, dass Zustände mit sehr kleinen Wellenzahlen $\kappa \ll 1$, d.h. Schallwellen, und sehr großen Wellenzahlen $\kappa \gg 1$, d.h. Anregungen mit Teilchencharakter, besonders langlebig sind. Währenddessen werden Anregungen im Übergangsbereich zwischen diesen beiden Regimen besonders stark gestreut. Die Streurrate $1/\tau$ hängt dabei quadratisch von V_0 ab, was leicht an Gl. (125) abzulesen ist. Die Lage des Minimums des Imaginärteils hängt jedoch nicht von V_0 ab. Es bleibt noch die Abhängigkeit von σ/ξ zu untersuchen. Für große Werte von $k\sigma$ kann der Term $\sim C(2\kappa\sigma/\xi)$ in (125) vernachlässigt werden und somit ergibt sich für den Imaginärteil:

$$\Im^{(1)}(\Sigma_{11}) = -\frac{1}{4} \frac{V_0^2}{\mu} \frac{\sigma}{\xi} \frac{\kappa \sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}}{(\kappa^2 + 1)(\kappa^2 + 2)} C(0), \quad (126)$$

was dem Grenzfall $\sigma/\xi \rightarrow \infty$ entspricht. Für große Werte von σ/ξ hängt somit die Lage des Minimums von $\Im(\Sigma_{11})$ nicht mehr von σ/ξ ab. Für kleine Werte von σ/ξ kann $C(2\kappa\sigma/\xi) \approx C(0)$ angenommen werden. Im Grenzfall $\sigma/\xi \rightarrow 0$ ergibt sich für $\Im(\Sigma_{11})$ folglich:

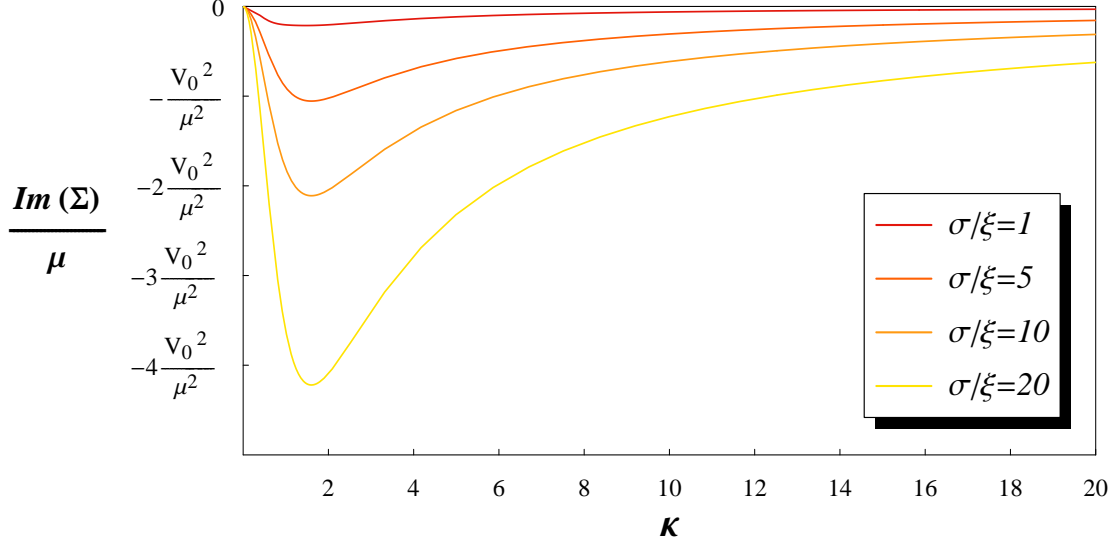


Abbildung 16: Imaginärteil der Selbstenergie in Einheiten des chemischen Potentials in Abhängigkeit von $\kappa = k\xi$ für verschiedene Werte der Korrelationslänge σ des Potentials im Verhältnis zur Kohärenzlänge ξ .

$$\Im^{(2)}(\Sigma_{11}) = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\mu} \frac{\sigma}{\xi} \frac{\kappa \sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}}{(\kappa^2 + 1)(\kappa^2 + 2)} C(0). \quad (127)$$

Für kleine Werte von σ/ξ hängt die Lage des Minimums also ebenfalls nicht mehr von σ/ξ ab. Um zu klären, was im Übergangsbereich von kleinen zu großen Werten von σ/ξ geschieht, ist der Imaginärteil der Selbstenergie in Abhängigkeit von κ noch einmal in Abbildung 17 dargestellt. Abgebildet sind dabei vier Kurven für verschiedene Werte von σ/ξ , angefangen von $\sigma/\xi = 0.001$ (gelb) bis $\sigma/\xi = 20$ (rot). Zusätzlich sind noch die Grenzfälle $\Im^{(1)}(\Sigma_{11})$ und $\Im^{(2)}(\Sigma_{11})$ (schwarz-gestrichelt) eingezeichnet. Um einen direkten Vergleich zwischen den Kurven zu ermöglichen, ist der Faktor σ/ξ in die Skala der y -Achse mit einbezogen worden. Die Kurve für $\sigma/\xi = 0.001$ fällt bereits mit dem Grenzfall $\Im^{(2)}(\Sigma_{11})$ und die Kurve für $\sigma/\xi = 20$ mit $\Im^{(1)}(\Sigma_{11})$ zusammen. In beiden Grenzfällen liegt das Minimum beim selben Wert für κ , da sich die beiden Grenzfälle nur um einen Faktor 2 unterscheiden. Die Lage des Minimums verschiebt sich im Übergangsbereich zwischen kleinen und großen Werten von σ/ξ etwas zu kleineren κ hin. Die Verschiebung der Lage des Minimums bewegt sich also in einem kleinen Wertebereich von κ zwischen 1 und 2. Man kann auch erkennen, dass die dazwischen liegenden Kurven für $\sigma/\xi = 0.2$ und $\sigma/\xi = 0.4$ für große κ ($k\sigma \gg 1$) mit dem Grenzfall $\Im^{(2)}(\Sigma_{11})$ übereinstimmen und für kleine κ ($k\sigma \ll 1$) mit $\Im^{(1)}(\Sigma_{11})$.

Somit kann man zusammenfassend sagen, dass in den Grenzfällen $k\sigma \ll 1$ und $k\sigma \gg 1$ die Streurrate linear von σ/ξ abhängt. Maximale Streuung der Anregungen findet dabei im Bereich $\kappa = 1$ bis $\kappa = 2$ statt, wobei sich im Übergangsbereich von kleinen zu großen Werten von σ/ξ die Lage des Maximums der Streurrate leicht zu kleineren κ hin verschiebt. Relevant

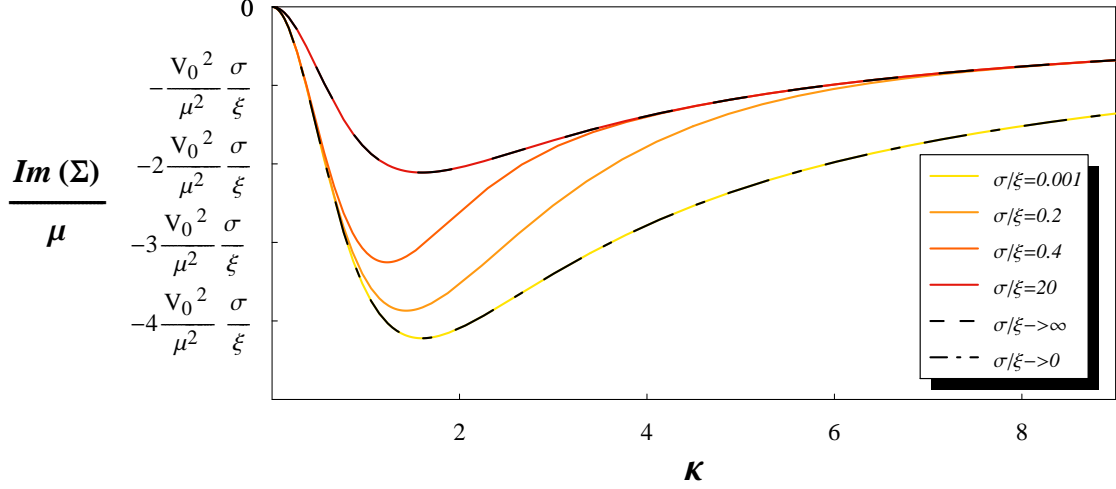


Abbildung 17: Imaginärteil der Selbstenergie in Einheiten des chemischen Potentials in Abhängigkeit von $\kappa = k\xi$ für verschiedene Werte von σ/ξ im Übergangsbereich von kleinen zu großen Korrelationslängen im Verhältnis zur Kohärenzlänge (bunt) und die Grenzfälle $\mathfrak{S}^{(1)}(\Sigma_{11})/\mu$ und $\mathfrak{S}^{(2)}(\Sigma_{11})/\mu$ (schwarz).

bei diesen Betrachtungen ist die Lebensdauer von Anregungen im Schallregime $\kappa \ll 1$. Wie in Abbildung 17 zu erkennen ist, ist die Lebensdauer von Schallwellen bei sehr schwach korrelierter Unordnung kürzer als bei Unordnung mit großer Korrelationslänge. Dies spielt vor allem bei der Simulation der Ausbreitung von Schallwellen eine Rolle, da die Integrationszeit nicht länger gewählt werden darf als die Lebensdauer der Anregung (siehe Kapitel 5).

4.3.2 Realteil der Selbstenergie und Korrektur zur Schallgeschwindigkeit

Nun wird der Realteil von Σ berechnet und in einen Ausdruck für die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit umgeformt. Der Realteil in ausführlicher Schreibweise mit den ausgedruckten Amplituden (96) und (97) sieht nun wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\Re(\Sigma_{11}) &= \frac{V_0^2 \sigma}{8 \pi \xi} \mathcal{P} \int d\kappa' \left[\left(\sqrt{\frac{\epsilon_\kappa^0 \epsilon_{\kappa'}^0}{\epsilon_\kappa \epsilon_{\kappa'}}} (\kappa^2 + \kappa'^2 - \kappa \cdot \kappa') - \sqrt{\frac{\epsilon_\kappa \epsilon_{\kappa'}}{\epsilon_\kappa^0 \epsilon_{\kappa'}^0}} \kappa \cdot \kappa' \right)^2 \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{2} (\kappa - \kappa')^2\right]^2} C \left((\kappa - \kappa') \frac{\sigma}{\xi} \right) \frac{1}{\epsilon_\kappa - \epsilon_{\kappa'}} \right] \\
&+ \frac{V_0^2 \sigma}{8 \pi \xi} \int d\kappa' \left[\left(\sqrt{\frac{\epsilon_\kappa^0 \epsilon_{\kappa'}^0}{\epsilon_\kappa \epsilon_{\kappa'}}} (\kappa^2 + \kappa'^2 - \kappa \cdot \kappa') + \sqrt{\frac{\epsilon_\kappa \epsilon_{\kappa'}}{\epsilon_\kappa^0 \epsilon_{\kappa'}^0}} \kappa \cdot \kappa' \right)^2 \right. \\
&\quad \cdot \left. \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{2} (\kappa - \kappa')^2\right]^2} C \left((\kappa - \kappa') \frac{\sigma}{\xi} \right) \frac{1}{-\epsilon_\kappa - \epsilon_{\kappa'}} \right] \quad (128)
\end{aligned}$$

mit $\epsilon_\kappa = \mu\sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + 2)}$ und $\epsilon_\kappa^0 = \mu\kappa^2$. Der Realteil von Σ_{11} liefert nun eine Korrektur zur Dispersionsrelation (vgl. Gl. (111)):

$$\hbar\omega = \epsilon_k + \Re(\Sigma_{11}). \quad (129)$$

Die Schallgeschwindigkeit erhält man durch Division durch $\hbar k$, da die Dispersionsrelation ϵ_k im Schall-Regime linear verläuft:

$$\epsilon_k = \sqrt{2}\mu\xi k \quad \text{für } \xi k \ll 1. \quad (130)$$

Somit sieht die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit wie folgt aus:

$$c_{rel} = \frac{c - c_0}{c_0} = \frac{\epsilon_k + \Re(\Sigma_{11}) - \epsilon_k}{\epsilon_k} = \frac{\Re(\Sigma_{11})}{\epsilon_k} = \frac{\Re(\Sigma_{11})}{\sqrt{2}\mu k \xi}. \quad (131)$$

Das Integral (128) kann numerisch berechnet werden. In Abbildung 18 ist der Realteil der Selbstenergie in Relation zur ungestörten Dispersionsrelation $\epsilon_\kappa = \mu\sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + 2)}$ dargestellt. Dies entspricht gerade der relativen Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für $\kappa \ll 1$. Diese ist für den Fall einer gauß-korrelierten Unordnung in Abhängigkeit von $\kappa = \xi k$ für verschiedene Werte der Korrelationslänge des Potentials σ im Verhältnis zur Kohärenzlänge ξ geplottet. Der Verlauf der Korrektur für die Werte $\sigma = 10$, $\sigma = 30$ und $\sigma = 100$ weist große Ähnlichkeit

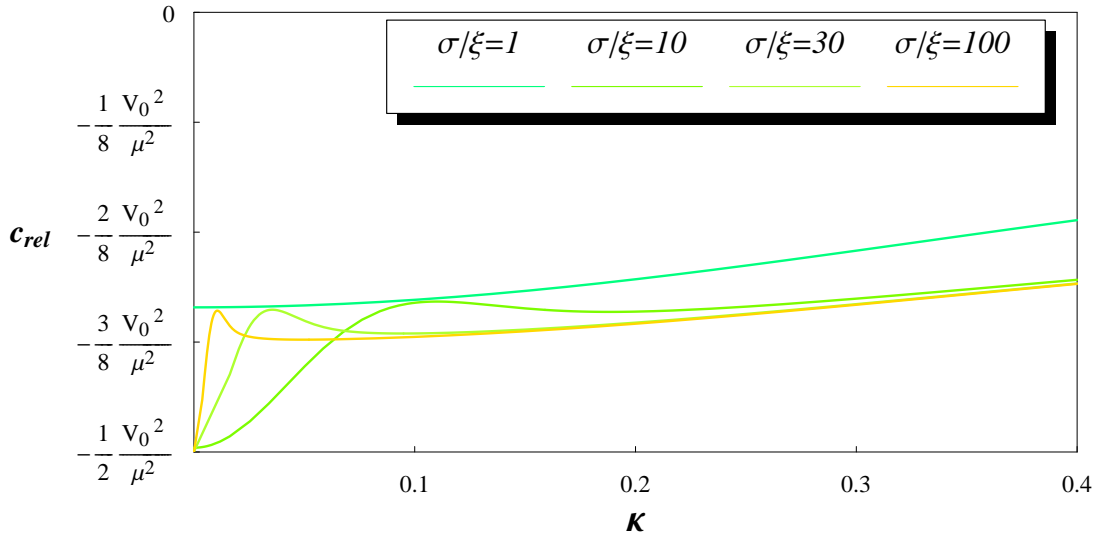


Abbildung 18: Relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von κ für verschiedene Werte von σ/ξ im Fall eines gauß-korrelierten Unordnungspotentials.

mit dem Ergebnis für den Verlauf von c_{rel} aus der hydrodynamischen Wellengleichung (Abb. 9) auf. Es sind wieder die bereits berechneten Grenzfälle zu erkennen: Für kleine κ , so dass

$k\sigma \ll 1$, liegt für diese drei Kurven die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit wieder bei $c_{rel} = -V_0^2/(2\mu^2)$. Für $k\sigma \gg 1$ lässt sich auch die Vorhersage $c_{rel} = -3V_0^2/(8\mu^2)$ bestätigen, was v.a. an der Kurve für $\sigma/\xi = 100$ zu sehen ist. Jedoch weichen die Kurven für weiter zunehmende κ wieder von diesem Wert ab, da für zu große κ die Bedingung $\kappa \ll 1$ nicht mehr erfüllt ist. Dass es in der theoretischen Vorhersage auf der Basis der hydrodynamischen Wellengleichung für zunehmende κ nicht zu diesen Abweichungen gekommen ist (vgl. Abbildung 8), liegt daran,

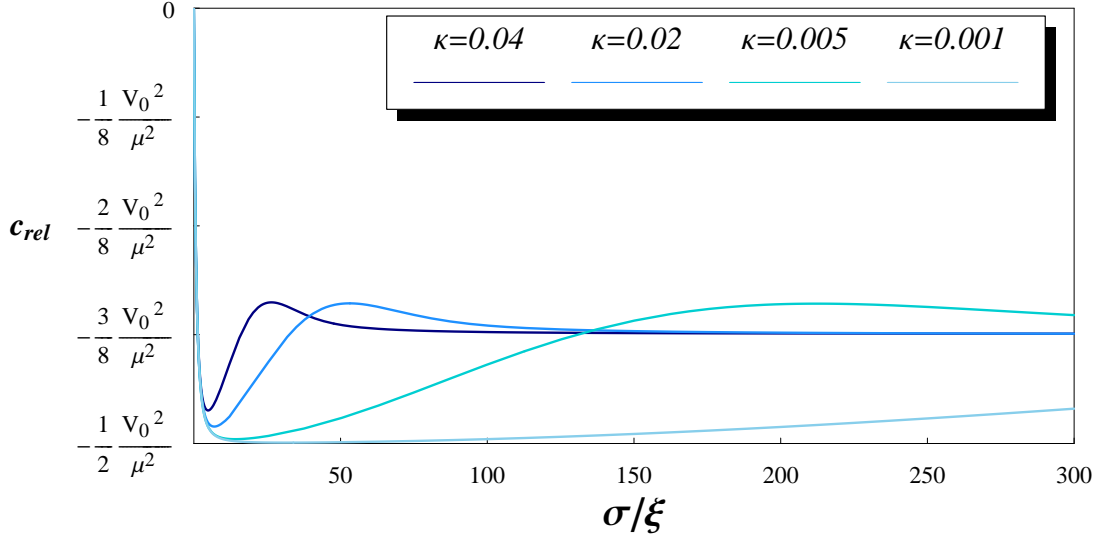


Abbildung 19: Relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von σ/ξ für verschiedene Werte von κ im Fall eines gauß-korrelierten Unordnungspotentials im Bereich $0 \leq \sigma/\xi \leq 300$.

dass die Bedingung $\kappa \ll 1$ Grundvoraussetzung für die Vernachlässigung des Quantendrucks bei der Herleitung der Wellengleichung gewesen ist. D.h. die Vorhersage für die Korrektur aus Abschnitt 3.2 verliert für zu große κ ihre Gültigkeit. Diese Einschränkung $\kappa \ll 1$ hat man bei der Entwicklung des Energiefunktional nicht gemacht. Deshalb gibt Abbildung 18 den Verlauf des Realteils der Selbstenergie in Relation zu ϵ_κ auch für große κ realistisch wieder. Dieser Bereich soll uns hier aber nicht weiter interessieren, da wir uns mit der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit beschäftigen und uns somit auf den Bereich $\kappa \ll 1$ beschränken.

In Abbildung 18 wird noch ein signifikanter Unterschied zur Vorhersage aus der Wellengleichung deutlich, und zwar das Verhalten für kleine Werte von σ/ξ , zu sehen an der Kurve für $\sigma/\xi = 1$. Die Vorhersage aus Abschnitt 3.2 liefert den Wert $c_{rel} = -V_0^2/(2\mu^2)$ für $\sigma/\xi \rightarrow 0$, besitzt aber in diesem Regime aufgrund der Thomas-Fermi-Näherung für die Teilchendichte keine Gültigkeit. Die mittels Energiefunktionalentwicklung berechnete Korrektur zur Schallgeschwindigkeit gilt auch im Bereich $\sigma \ll \xi$ und es zeigt sich für $\sigma/\xi = 1$ und $\kappa \rightarrow 0$ eine deutliche Abweichung vom Verhalten der anderen Kurven. Dieses Verhalten ist in den Abbildungen 19 und 20 klarer zu erkennen. Dort ist die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von σ/ξ für verschiedene Werte von κ geplottet. Für die Bereiche $\xi \ll 1/k \ll \sigma$ und $\xi \ll \sigma \ll 1/k$ zeigt der Verlauf der Kurve Übereinstimmung mit den in Abschnitt 3.2 analytisch berechneten Grenzfällen: Für $\sigma \gg 1/k$ erhält man als Korrektur

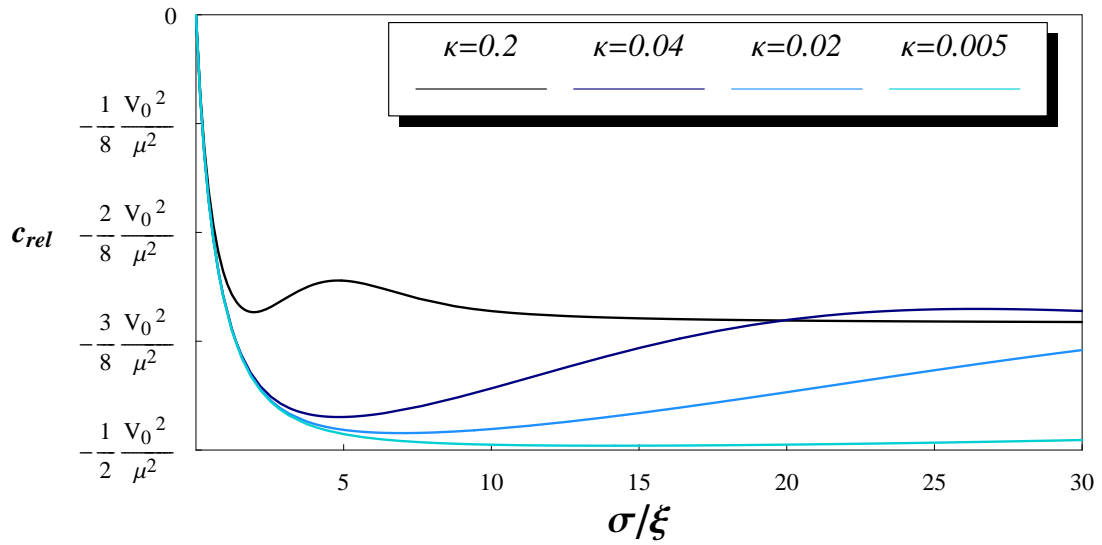


Abbildung 20: Relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von σ/ξ für verschiedene Werte von σ/ξ im Fall eines gauß-korrelierten Unordnungspotentials im Bereich $0 \leq \sigma/\xi \leq 30$.

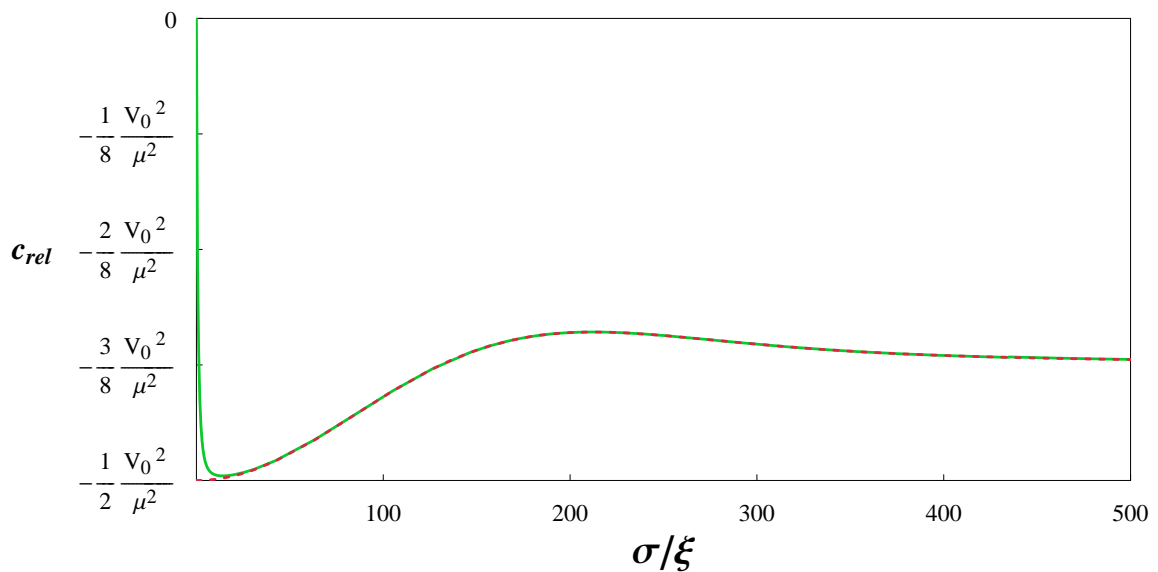


Abbildung 21: Relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit im Fall gauß-korrelierter Unordnung in Abhängigkeit von σ/ξ für $\kappa = 0.005$. Vergleich der theoretischen Vorhersage auf der Basis der hydrodynamischen Wellengleichung (rot-gestrichelt) mit dem Ergebnis aus der Entwicklung des Energiefunktionals (grün).

wieder $c_{rel} = -3V_0^2/(8\mu^2)$, was an den Kurven $\kappa = 0.04$ und $\kappa = 0.02$ besonders gut zu sehen ist. Für $\kappa = 0.005$ und $\kappa = 0.001$ liegt dieses Regime bereits außerhalb des geplotteten Be-

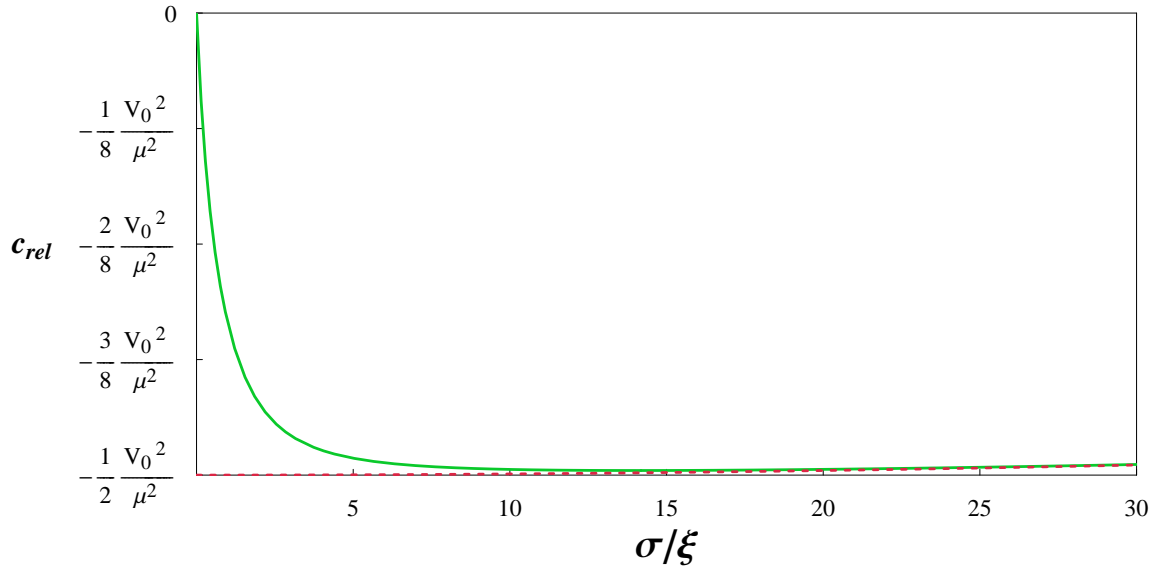


Abbildung 22: Vergrößerter Ausschnitt aus Abbildung 21.

reichs. Dafür sieht man für diese beiden Kurven den Grenzfall $c_{rel} = -V_0^2/(2\mu^2)$ im Bereich $\xi \ll \sigma \ll 1/k$ gut. Dieses Regime ist umso schlechter ausgeprägt, je größer κ ist. So erkennt man, dass z. B. für $\kappa = 0.04$ der Wert $c_{rel} = -V_0^2/(2\mu^2)$ nicht erreicht wird. Dies liegt daran, dass für größere κ (aber immernoch $\kappa \ll 1$) die Bedingung $k\sigma = \kappa\sigma/\xi \ll 1$ nur erfüllt ist, falls auch σ/ξ klein ist. Dies ist aber wiederum ein anderes Regime unseres Systems ($\sigma \ll \xi$), das über den Ansatz der Wellengleichung aus Abschnitt 3.2 nicht zugänglich gewesen ist. Dieses Regime ist in Abbildung 20 noch einmal vergrößert dargestellt. Man erkennt, dass in diesem Bereich die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für $\sigma/\xi \rightarrow 0$ verschwindet. In den Abbildungen 21 und 22 sind die Ergebnisse der theoretischen Vorhersagen für die Korrektur aus der hydrodynamischen Wellengleichung und der Entwicklung des Energiefunktional für $\kappa = 0.005$ im direkten Vergleich dargestellt. In Abbildung 21 sieht man deutlich die sehr gute Übereinstimmung der beiden Graphen im Bereich $\xi \ll \sigma$, während in Abbildung 22 der Unterschied der beiden Vorhersagen im Bereich $\xi \gg \sigma$ gut zu erkennen ist.

Diesen Bereich gilt es jetzt noch weiter zu untersuchen um auch für dieses Regime eine gültige analytische Vorhersage für die Schallgeschwindigkeitskorrektur zu erhalten. Des Weiteren sollten sich aber auch die analytischen Ergebnisse aus Abschnitt 3.2 in den anderen beiden Regimen durch entsprechende Entwicklungen von Gl. (128) reproduzieren lassen. Dies ist nun die Zielsetzung des nächsten Abschnitts.

4.4 Behandlung von analytisch berechenbaren Grenzfällen

Es können nun bekanntlich drei Regime unterschieden werden. Diese ergeben sich wieder aus den drei relevanten Längenskalen und unterscheiden sich im Verhältnis der Korrelationslänge σ zur Kohärenzlänge ξ bzw. von Korrelationslänge zur Wellenlänge der Anregung $\frac{1}{k}$. Grundlegende Voraussetzung, um sich auf den Schallwellenbereich zu beschränken, ist natürlich

wieder die Bedingung $\xi \ll \frac{1}{k}$, d.h. die Kohärenzlänge ist immer kleiner als die Wellenlänge der Anregung. Somit ergeben sich noch folgende drei Möglichkeiten: σ ist die größte, mittlere oder kleinste Längenskala:

- $\xi \ll \frac{1}{k} \ll \sigma$
- $\xi \ll \sigma \ll \frac{1}{k}$
- $\sigma \ll \xi \ll \frac{1}{k}$

In diesen drei Grenzfällen lassen sich einfache analytische Ausdrücke für die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit angeben, die nun im Folgenden berechnet werden.

1. $\xi \ll \frac{1}{k} \ll \sigma$

Wir beginnen mit dem Fall, dass die Korrelationslänge σ des Potentials die größte Längenskala darstellt. Die Argumentation bei der Entwicklung des Realteils der Selbstenergie (128) ist dabei analog zu Abschnitt 3.3, beinhaltet nur etwas mehr Rechenaufwand. In Abbildung 23 ist die Summe der Integranden beider Integrale aus (128) dargestellt. Die Korrelationsfunktion, in diesem Fall eine Gauß-Kurve, ist wieder separat abgebildet. Der Integrand besitzt zwei Pole bei $\kappa' = \pm\kappa$, die jeweils wieder der Vorwärts- und Rückstreuung der Anregung entsprechen. Wie aus der Abbildung hervorgeht, ist die Korrelationsfunktion für $\sigma \gg 1/k$ um den Pol bei $\kappa' = \kappa$ zentriert und schneidet den Integranden bereits vor $\kappa' = -\kappa$ ab, so dass der Rückstreupol nicht mehr zum Integral beiträgt und in diesem Fall nur Vorwärtsstreuung auftritt.

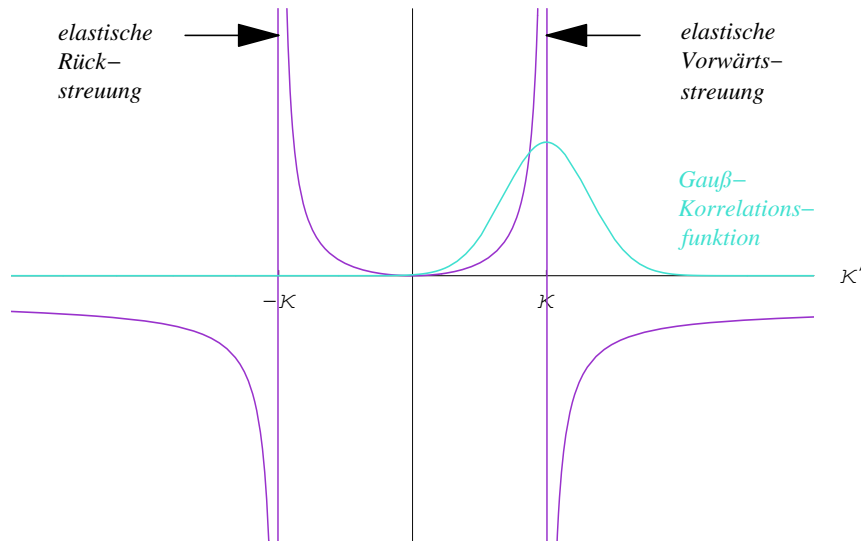


Abbildung 23: *Qualitative Darstellung des Integranden von (60) mit separat abgebildeter Korrelationsfunktion für $\sigma \gg \frac{1}{k}$.*

Die beiden Terme $1/(\epsilon_\kappa - \epsilon_{\kappa'})$ und $1/(\epsilon_\kappa + \epsilon_{\kappa'})$ lassen sich so umformen, dass die Pole, insbesondere der bei $\kappa' = \kappa$, als separate Faktoren im Integranden auftreten:

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa^2(\kappa^2+2)} - \sqrt{\kappa'^2(\kappa'^2+2)}} = \frac{1}{\kappa - \kappa'} \frac{\sqrt{\kappa^2(\kappa^2+2)} + \sqrt{\kappa'^2(\kappa'^2+2)}}{(\kappa + \kappa')(\kappa^2 + \kappa'^2 + 2)}, \quad (132)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\kappa^2(\kappa^2+2)} + \sqrt{\kappa'^2(\kappa'^2+2)}} = \frac{1}{\kappa - \kappa'} \frac{\sqrt{\kappa^2(\kappa^2+2)} - \sqrt{\kappa'^2(\kappa'^2+2)}}{(\kappa + \kappa')(\kappa^2 + \kappa'^2 + 2)}. \quad (133)$$

Somit kann der Integrand, ausgenommen der Korrelationsfunktion und der Polstelle bei $\kappa' = \kappa$, in κ' um das Maximum der Korrelationsfunktion bei $\kappa' = \kappa$ entwickelt werden. Mit der Substitution $x = \kappa - \kappa'$ kann das Integral nun wie folgt geschrieben werden:

$$\Re(\Sigma_{11}) = \frac{V_0^2 \sigma}{8 \pi \mu \xi} \left\{ \int dx \frac{1}{x} C\left(x \frac{\sigma}{\xi}\right) f(x, \kappa) + \int dx \frac{1}{x} C\left(x \frac{\sigma}{\xi}\right) g(x, \kappa) \right\}. \quad (134)$$

O.B.d.A. kann auch hier wieder $\kappa > 0$ angenommen werden. Die Funktionen $f(x, \kappa)$ und $g(x, \kappa)$ beinhalten dabei alle übrigen auftretenden Terme, die aus Übersichtlichkeitsgründen hier nicht explizit angegeben werden. Entwickeln der Funktionen $f(x, \kappa)$ und $g(x, \kappa)$ um $x = 0$ bis zur linearen Ordnung liefert

$$\Re(\Sigma_{11}) = \frac{V_0^2 \sigma}{8 \pi \mu \xi} \left\{ \int dx [c_0(\kappa) + c_1(\kappa)x] \frac{1}{x} C\left(x \frac{\sigma}{\xi}\right) \right. \quad (135)$$

$$\left. + \int dx [d_0(\kappa) + d_1(\kappa)x] \frac{1}{x} C\left(x \frac{\sigma}{\xi}\right) \right\} \quad (136)$$

mit den Entwicklungskoeffizienten

$$c_0(\kappa) = \frac{2 \kappa^2}{(\kappa^2 + 1)\sqrt{\kappa^2 + 2}}, \quad c_1(\kappa) = \frac{\kappa^4 (\kappa^4 - \kappa^2 - 4)}{(1 + \kappa^2)^2 [\kappa^2 (\kappa^2 + 2)]^{3/2}}, \quad (137)$$

$$d_0(\kappa) = 0, \quad d_1(\kappa) = -\frac{2 \kappa (\kappa^2 + 1)^2}{(\kappa^2 + 2)^{3/2}}. \quad (138)$$

Um eine in κ lineare Korrektur zur Dispersionsrelation zu finden, entwickelt man diese Koeffizienten bis zur linearen Ordnung in κ . Dies liefert das verbleibende Integral

$$\begin{aligned}
\Re(\Sigma_{11}) &= \frac{V_0^2 \sigma}{8\pi\mu\xi} \int dx \left[\left(-\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \kappa C\left(x \frac{\sigma}{\xi}\right) \right] \\
&= -\frac{3}{8} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu\xi} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \kappa \int dx C\left(x \frac{\sigma}{\xi}\right) \\
&= -\frac{3}{8} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu\xi} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \kappa \int dx dr \left[K(r) e^{-ix \frac{\sigma}{\xi} r} \right] \\
&= -\frac{3}{8} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu\xi} \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \kappa \int dr \left[2\pi \frac{\xi}{\sigma} \delta(r) K(r) \right] \\
&= -\frac{3}{8} \frac{\sqrt{2} V_0^2}{\mu} \kappa.
\end{aligned} \tag{139}$$

Damit erhält man für die Dispersionsrelation

$$\epsilon_k = \sqrt{2} \mu k \xi \left(1 - \frac{3}{8} \frac{V_0^2}{\mu^2} \right) \tag{140}$$

und für die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit:

$$c_{rel} = -\frac{3}{8} \frac{V_0^2}{\mu^2}. \tag{141}$$

Dieses Ergebnis steht somit in Einklang mit dem Resultat aus Abschnitt 3.3.

2. $\xi \ll \sigma \ll \frac{1}{k}$

In diesem Fall ist die Korrelationslänge σ des Potentials wesentlich größer als die Kohärenzlänge ξ . Außerdem wird in diesem Fall angenommen, dass σ kleiner ist als die Wellenlänge der Anregung. Somit überdeckt die Korrelationsfunktion, wie in Abbildung 24 dargestellt, beide Pole. Beide Pole tragen also gleichermaßen zum Integral bei und es tritt sowohl Vorwärts- als auch Rückstreuung auf.

Somit kann das Integral (128) zunächst für kleine κ entwickelt werden, und zwar bis zur linearen Ordnung:

$$\Re(\Sigma_{11}) = -\frac{V_0^2 \sigma}{8\pi\mu\xi} \int d\kappa' \left(\frac{\sqrt{2} \kappa'^4 \kappa}{\kappa'^2 + 2} + 2\sqrt{2} \kappa \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{2} \kappa'^2\right)^2} C\left(\kappa' \frac{\sigma}{\xi}\right). \tag{142}$$

Da auch $\sigma \gg \xi$ gilt, kann der Integrand ausgenommen der Korrelationsfunktion in κ' um das Maximum der Korrelationsfunktion bei $\kappa' = 0$ bis zur linearen Ordnung entwickelt werden. Die erste Ordnung in κ' verschwindet. Es bleibt also nur den Integranden bis auf die Korrelationsfunktion an der Stelle $\kappa' = 0$ auszuwerten und man erhält für den Realteil der Selbstenergie in linearer Ordnung in κ :

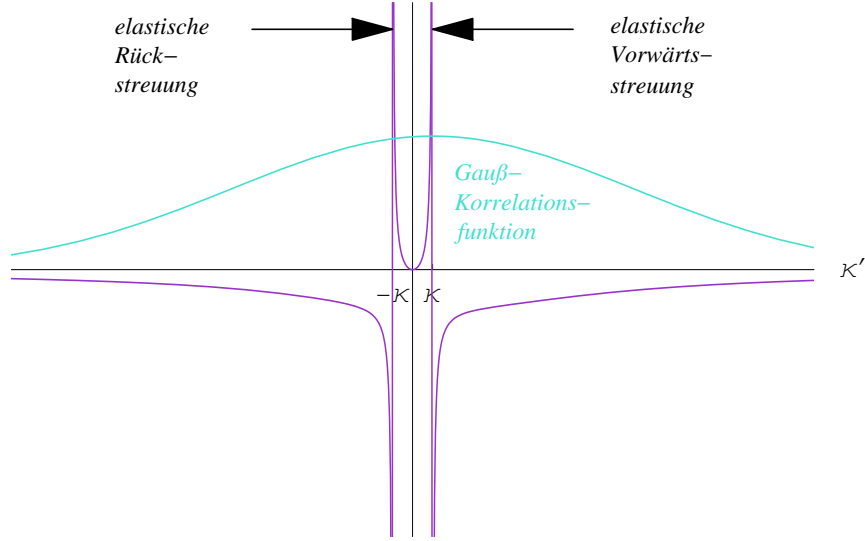


Abbildung 24: Qualitative Darstellung des Integranden von (60) mit separat abgebildeter Korrelationsfunktion für $\sigma \ll \frac{1}{k}$.

$$\begin{aligned} \Re(\Sigma_{11}) &= -\frac{V_0^2 \sigma}{8\pi \mu \xi} 2\sqrt{2} \kappa \int d\kappa' C\left(\kappa' \frac{\sigma}{\xi}\right) = -\frac{V_0^2 \sigma}{4\pi \mu \xi} \sqrt{2} \kappa \frac{\xi}{\sigma} 2\pi K(0) \quad (143) \\ &= -\frac{\sqrt{2} V_0^2}{2\mu} \kappa. \end{aligned}$$

Die korrigierte Dispersionsrelation ergibt sich damit zu

$$\epsilon_k = \sqrt{2} \mu k \xi \left(1 - \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\mu^2}\right) \quad (144)$$

und die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit beträgt:

$$c_{rel} = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\mu^2}. \quad (145)$$

Auch hier stimmt das Ergebnis wieder mit dem Resultat aus Abschnitt 3.3 überein.

3. $\sigma \ll \xi \ll \frac{1}{k}$

Für sehr kleine Korrelationslängen, bzw. im Grenzfall der δ -Korrelation, ist die Korrelationsfunktion im k -Raum konstant, wie in Abbildung 25 dargestellt, mit der Konstanten $C(0)$ und die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit verschwindet linear für $\sigma \rightarrow 0$ bei konstantem V_0 , was an Gl. (128) leicht abzulesen ist. In diesem Fall variiert das Potential auf so kurzen Längenskalen, dass die Teilchendichte der Potentialänderung nicht

mehr folgen kann und kaum noch von der Kondensatdichte ohne Potential $n_\infty = \sqrt{\mu/g}$ abweicht (vgl. Abb. 7 unten). Folglich ist auch das Verschwinden der Schallgeschwindigkeitskorrektur für $\sigma \rightarrow 0$ plausibel. Die Steigung, mit der die Korrektur verschwindet, wird im Folgenden berechnet.

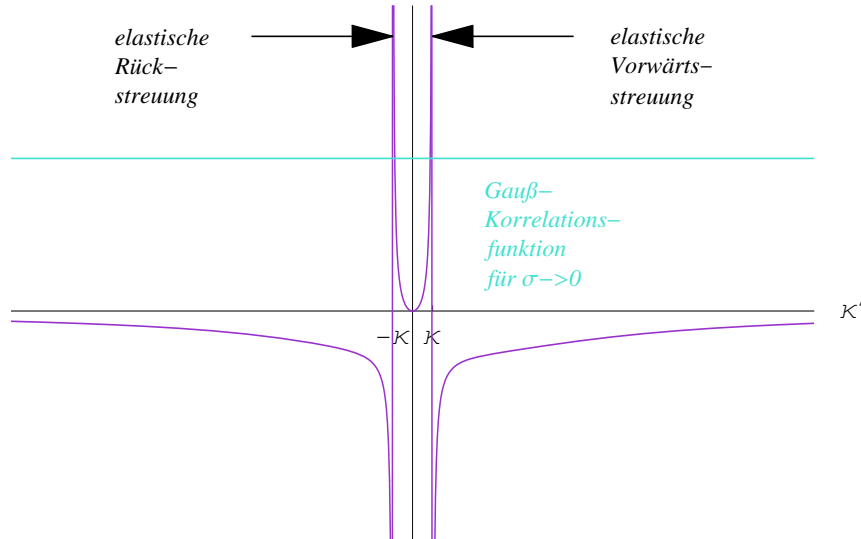


Abbildung 25: Qualitative Darstellung des Integranden von (60) mit separat abgebildeter Korrelationsfunktion für $\sigma \rightarrow 0$.

Analog zu Fall 2 kann der Integrand auch hier in κ bis zur linearen Ordnung entwickelt werden, was einen analytisch integrierbaren Ausdruck liefert:

$$\Re(\Sigma_{11}) = -\frac{V_0^2 \sigma}{8 \pi \mu \xi} C(0) \kappa \int d\kappa' \frac{4\sqrt{2}(4 + 2\kappa'^2 + \kappa'^4)}{(2 + \kappa'^2)^3} = -\frac{7}{16} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu \xi} C(0) \kappa. \quad (146)$$

Die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit ergibt sich somit zu:

$$c_{rel} = -\frac{7}{16\sqrt{2}} \frac{V_0^2 \sigma}{\mu^2 \xi} C(0). \quad (147)$$

Anders als in den anderen beiden Grenzfällen ergibt sich hier eine Korrektur, die noch von der ($k = 0$)-Komponente der Korrelationsfunktion abhängt. Somit erhält man für ein Speckle-Potential mit $C(0)_{Speckle} = \pi$ als Korrektur zur Schallgeschwindigkeit

$$c_{rel,Speckle} = -\frac{7}{16\sqrt{2}} \pi \frac{V_0^2 \sigma}{\mu^2 \xi} \quad (148)$$

und im Fall einer Gaußschen Unordnung mit $C(0)_{Gauß} = \sqrt{2\pi}$

$$c_{rel,Gau\beta} = -\frac{7}{16} \sqrt{\pi} \frac{V_0^2}{\mu^2} \frac{\sigma}{\xi}. \quad (149)$$

Somit hat man nun auch einen analytischen Ausdruck für die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit im Bereich $\sigma \ll \xi$ gefunden, was im Rahmen der hydrodynamischen Theorie basierend auf der Wellengleichung aus Abschnitt 3.2 nicht möglich war.

4.5 Zusammenfassung der Ergebnisse

Wir haben nun auf Basis einer störungstheoretischen Behandlung des großkanonischen Gross-Pitaevskii-Energiefunktionalen den Realteil der Selbstenergie in Bornscher Näherung berechnen können und somit wieder eine negative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in einer Dimension erhalten. Der Ausdruck (128) für den Realteil selbst ist dabei nicht nur im Schall-Regime $\xi k \ll 1$ gültig, sondern kann auch zur Beschreibung teilchenartiger Anregungen herangezogen werden im Gegensatz zu dem Ergebnis (60) auf Basis der hydrodynamischen Wellengleichung. Aber wir haben noch eine wichtigere Ergänzung zur Theorie aus Abschnitt 3.2 gefunden: Es ist uns mit (128) auch möglich das Regime $\sigma \ll \xi$ zu beschreiben und wir haben auch dort einen analytischen Ausdruck für die Schallgeschwindigkeitskorrektur erhalten. Die analytischen Ergebnisse aus den bereits in Abschnitt 3.3 betrachteten Grenzfällen haben wir ebenfalls reproduzieren können. Somit haben wir nun drei Regime mit analytischen Resultaten:

- $\xi \ll \frac{1}{k} \ll \sigma \quad \Rightarrow \quad c_{rel} = -\frac{3}{8} \frac{V_0^2}{\mu^2}$
- $\xi \ll \sigma \ll \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad c_{rel} = -\frac{1}{2} \frac{V_0^2}{\mu^2}$
- $\sigma \ll \xi \ll \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad c_{rel} = -\frac{7}{16\sqrt{2}} \frac{V_0^2}{\mu^2} \frac{\sigma}{\xi} C(0)$

Die analytischen Ausdrücke für die Schallgeschwindigkeitskorrektur hängen im Bereich $\xi \ll \sigma$ nur vom Verhältnis der Potentialstärke zum chemischen Potential ab. Im Bereich $\xi \gg \sigma$ verschwindet die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit linear mit $\sigma/\xi \rightarrow 0$ und einer Steigung die nur von V_0/μ und der ($k=0$)-Komponente der Korrelationsfunktion abhängt. Um diese Resultate in graphischer Form zusammenzufassen, sind diese drei Grenzfälle in Abbildung 26 zusammen mit der numerisch berechneten Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für eine Speckle-Unordnung in Abhängigkeit von σ/ξ dargestellt. Die negative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit steht im Einklang mit den Vorhersagen aus [10] und [11], jedoch im Widerspruch zu [12]. Um unsere Ergebnisse zu untermauern, wird eine numerische Simulation zur Ausbreitung von Schallwellen im ungeordneten Bose-Einstein-Kondensat herangezogen. Diese Simulation ist für gauß-korrelierte und Speckle-Unordnung realisiert worden und bestätigt unsere theoretischen Resultate, wie im nächsten Kapitel gezeigt wird.

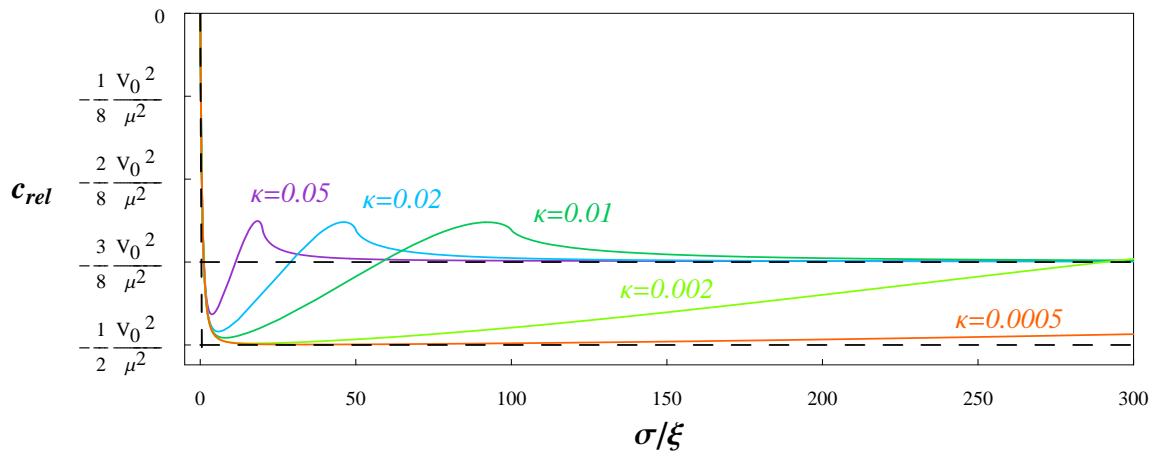


Abbildung 26: Relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit in Abhängigkeit von σ/ξ . Numerisches Ergebnis für eine Speckle-Unordnung für verschiedene Werte von κ (bunt) und analytische Resultate der Grenzfälle (schwarz-gestrichelt).

5 Vergleich der Ergebnisse mit der numerischen Simulation

In diesem Kapitel wird eine numerische Simulation zur Ausbreitung von Schallwellen im Bose-Einstein-Kondensat vorgestellt. Diese Simulation wurde sowohl mit einer Gaußschen Unordnung als auch mit einem Speckle-Potential durchgeführt. Ziel ist es hier eine numerische Untermauerung der Theorie und der berechneten Korrekturen zur Schallgeschwindigkeit zu erhalten und Abweichungen der theoretischen Resultate von den Ergebnissen der Simulation zu erklären. Zunächst wird ein grober Überblick über die Arbeitsweise des Programms gegeben und im Anschluss daran auf die einzelnen Programmbestandteile näher eingegangen. Es werden die mit der Simulation erzeugten Messergebnisse präsentiert, mit den theoretischen Resultaten verglichen und eine Ergänzung der Theorie dargelegt, die die Übereinstimmung von Simulation und Theorie verbessert.

5.1 Prinzipielle Funktionsweise des Programms im Überblick

Die Arbeitsweise des Programms basiert auf der numerischen Integration der Gross-Pitaevskii Gleichung (16). Zunächst wird mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators ein Unordnungspotential generiert, das die gewünschten statistischen Eigenschaften aufweist. Das Programm berechnet dann den Grundzustand des Kondensats, auf den daraufhin eine Bogoliubov-Mode als Anregung gegeben wird, deren Ausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt wird. Dies wird für eine bestimmte Anzahl von Unordnungsrealisierungen durchgeführt und anschließend über die Schallgeschwindigkeiten der einzelnen Durchläufe gemittelt. Dabei werden die Parameterwerte Potentialstärke $\frac{V_0}{\mu}$, Anregungsamplitude Δ , Korrelationslänge des Potentials σ , Kohärenzlänge ξ und Anzahl der Wellenlängen n_w , die die Systemgröße umfassen soll, dem Programm übergeben. Das System besteht aus einer vorgegebenen Anzahl von N Gitterpunkten, wobei die Gitterkonstante, die auf 1 gesetzt worden ist, als Längeneinheit dient. Die Wellenzahl k der Anregung lässt sich aus den vorgegebenen Werten errechnen durch

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi n_w}{N}. \quad (150)$$

Zur Vereinfachung wurden \hbar und m (Masse) gleich 1 gesetzt. Somit ergibt sich das chemische Potential mit Gleichung (41) zu

$$\mu = \frac{1}{2\xi^2}. \quad (151)$$

Des Weiteren haben wir $g = \mu$ gewählt, woraus sich mit Gleichung (18) für die Kondensatdichte ohne Potential $n_\infty = 1$ ergibt. Zu beachten sind noch die Verhältnisse der unterschiedlichen Längenskalen, die in der Simulation von Relevanz sind. Die Größen, die diese Längenskalen vorgeben, sind die Systemgröße N , die Korrelationslänge des Potentials σ , die Kohärenzlänge ξ und die Wellenlänge der Anregung. Aufgrund des diskreten Gitters sollten diese Größen nicht zu klein gewählt werden, d.h. mindestens fünf Gitterpunkte umfassen. Des Weiteren sollten Wellenlänge, ξ und σ deutlich kleiner als die Systemgröße sein um Finite-Size-Effekte zu minimieren.

5.2 Programmbestandteile

- **Erzeugung eines gauß-korrelierten Unordnungspotentials**

Ein Zufallszahlengenerator erzeugt gleichverteilte Zufallszahlen. Ein Paar gleichverteilter Zufallszahlen geht mit Hilfe der Box-Muller-Transformation in ein Paar normalverteilter Zufallszahlen mit Mittelwert 0 und Standardabweichung 1 über. Durch Faltung mit einer Gauß-Funktion, in die die gewünschte Korrelationslänge des Potentials eingeht, erhält man somit ein Unordnungspotential mit Gauß-Korrelation der Korrelationslänge σ . Nun sind noch die statistischen Eigenschaften des Unordnungspotentials $\bar{V} = 0$ und $\overline{V(r)V(r)} = V_0^2$ sicherzustellen. Bei einer sehr großen Anzahl an Realisierungen stellt sich \bar{V} aufgrund der Normalverteilung der Zufallszahlen mit Mittelwert 0 von selbst ein. Um jedoch den zeitlichen Aufwand im Rahmen zu halten, wird der räumliche Mittelwert des Unordnungspotentials jeder Realisierung auf 0 gesetzt, was $\bar{V} = 0$ im Unordnungsmittel zur Folge hat. Durch Normierung des Potentials gewährleistet man zudem noch die Bedingung $\overline{V(r)V(r)} = V_0^2$.

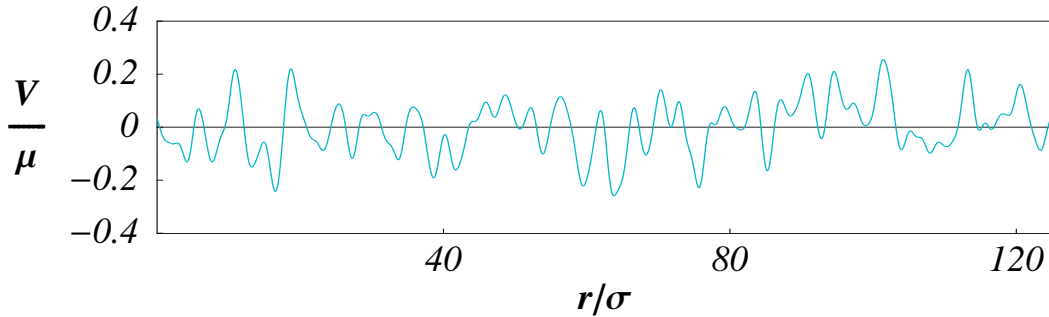


Abbildung 27: *Gauß-korreliertes Unordnungspotential in Einheiten des chemischen Potentials μ aufgetragen gegen den Ort r in Einheiten der Korrelationslänge σ .*

Als Beispiel ist eine Realisierung der Gaußschen Unordnung in Abbildung 27 dargestellt. Das Potential V wurde dabei in Einheiten des chemischen Potentials μ gegen den Ort r in Einheiten der Korrelationslänge σ aufgetragen. Der Mittelwert des Potentials bei $V = 0$ ist ebenfalls als schwarze Linie eingezeichnet. Die Abbildung zeigt deutlich die Variation des Potentials auf der Längenskala σ .

- **Erzeugung eines Speckle-Potentials**

Bei der Erzeugung eines Speckle-Potentials werden ebene Wellen mit zufälligen komplexen Amplituden überlagert. Die Real- und Imaginärteile dieser Amplituden sind normalverteilte Zufallszahlen, die analog zur Gaußschen Unordnung erzeugt werden. Dabei ist die Systemgröße immer ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlängen der ebenen Wellen, d.h. es gilt für die Wellenzahlen

$$k_i = \frac{2\pi}{N}i, \quad i \in \left[0, 1, \dots, \frac{N}{\pi\sigma}\right]. \quad (152)$$

Um der Speckle-Statistik gerecht zu werden ist die maximale Wellenzahl $k_{max} = \frac{2}{\sigma}$, vgl. Abbildung 5. Das Potential ergibt sich nun aus dem Betragsquadrat der zufälligen Superposition dieser ebenen Wellen (vgl. Kap. 1.2) mit entsprechender Normierung um $\bar{V} = 0$ und $\overline{V(r)V(r)} = V_0^2$ zu gewährleisten. In Abbildung 28 ist ein durch die Simulation erzeugtes Speckle-Potential abgebildet. Hier sieht man deutlich den Unterschied zur Gaußschen Unordnung, denn das Speckle-Potential besitzt eine wohldefinierte Basislinie bedingt durch das Betragsquadrat, ist nach oben nicht beschränkt und weist somit, zwar mit entsprechend geringer Wahrscheinlichkeit, teilweise sehr hohe Potentialpeaks auf.

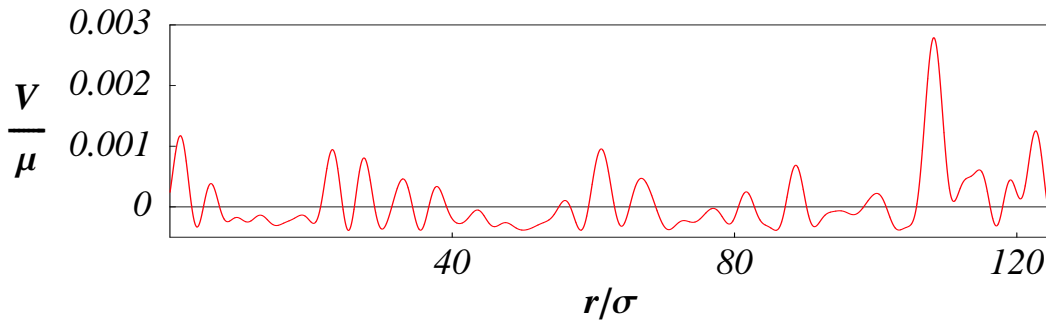


Abbildung 28: *Speckle-Unordnung in Einheiten des chemischen Potentials μ aufgetragen gegen den Ort r in Einheiten der Korrelationslänge σ .*

- **Grundzustandsberechnung mittels imaginärer Zeitentwicklung**

Die Grundzustandsberechnung des Kondensats erfolgt mit Hilfe der imaginären Zeitentwicklung. Die Zeitentwicklung der Wellenfunktion wird dabei durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung (16) beschrieben. Nun nutzt man die Tatsache, dass der Grundzustand die niedrigste Energie besitzt. D.h. die Einführung der imaginären Zeit $\tau = it$ bewirkt ein zeitliches Abklingen aller anderen Zustände, so dass die Wellenfunktion letztendlich gegen den Grundzustand konvergiert. Bei der Implementierung wird zur numerischen Integration der Gross-Pitaevskii-Gleichung in jedem Zeitschritt ein explizites Runge-Kutta-Verfahren dritter Stufe verwendet [23]. Dabei ist darauf zu achten, dass die Integrationszeit ausreichend lange gewählt wurde, so dass der Grundzustand auskonvergiert ist. Im konkreten Fall unserer Messungen wurde eine Integrationszeit von 40000 Zeitschritten gewählt.

- **Zeitentwicklung der Anregung und Bestimmung der Schallgeschwindigkeit**

Nachdem der Grundzustand berechnet worden ist, wird zu diesem eine Bogoliubov-Mode der Form

$$\delta\Psi = \Delta \begin{pmatrix} \epsilon_k^0 \\ \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k} \cos(kr) - i \sin(kr) \end{pmatrix} \quad (153)$$

addiert. Dabei bezeichnet Δ die Anregungsamplitude, die dem Programm übergeben wird. Auch hier wird die zeitliche Entwicklung dieses Zustands wieder durch die Gross-Pitaevskii-Gleichung beschrieben, welche wiederum in jedem Zeitschritt durch das bereits erwähnte Runge-Kutta-Verfahren integriert wird. Aufgrund dieser Anfangsbedingung (153) bewegt sich diese Welle bei der Zeitentwicklung fort und es gilt nun die Schallgeschwindigkeit zu bestimmen. Betrachtet man sich diese einzelne Bogoliubov-Mode γ_k im k -Raum, so rotiert die Phase der Anregung zeitlich mit einer Frequenz, die gleich der Energie ϵ der Anregung ist. Durch Auftragung dieser Phase gegen die Zeit erhält man nach linearer Regression eine Gerade, deren Steigung somit der Energie der Anregung entspricht. Dasselbe Verfahren wird auch auf die Berechnung des Grundzustands und der Anregungsausbreitung ohne Unordnungspotential angewandt. Aus der Differenz der so erhaltenen Geradensteigungen kann durch Division durch die Wellenzahl die Schallgeschwindigkeit und ihre relative Korrektur ermittelt werden:

$$c_{rel} = \frac{c - c_0}{c_0}. \quad (154)$$

Dabei bezeichnet c_0 die numerisch bestimmte Schallgeschwindigkeit ohne Unordnung, c diejenige mit Unordnung. Auch hier ist bei der numerischen Integration darauf zu achten, dass die Integrationszeit ausreichend lange gewählt wurde, jedoch nicht länger als die Lebensdauer der Anregung.

5.3 Messergebnisse

Es wurden Messreihen sowohl für eine gauß-korrelierte Unordnung als auch für ein Speckle-Potential durchgeführt. Dabei wurde bei einem über alle Messungen hinweg konstanten Wert für $k\xi = 0.02$ die Schallgeschwindigkeit für verschiedene Bereiche der Korrelationslänge gemessen. Wie bereits in den Abbildungen 19, 20 und 26 zu erkennen gewesen ist, ist das Regime $\xi \ll \sigma \ll 1/k$ für den Wert $k\xi = 0.02$ nicht besonders gut ausgeprägt und die numerisch berechnete theoretische Kurve für die relative Schallgeschwindigkeitskorrektur erreicht nicht ganz den Wert $c_{rel} = -V_0^2/(2\mu^2)$, der durch die analytische Rechnung in diesem Regime vorhergesagt wird. Dass wir aber keinen kleineren Wert für $k\xi$ wählen, bei dem dieses Regime ausgeprägter wäre, liegt an der zu langen Rechenzeit des Simulationsprogramms. Da ein kleinerer Wert für $k\xi$ auch bedeutet, dass das Regime $\xi \ll 1/k \ll \sigma$ erst bei viel größeren Werten der Korrelationslänge σ erreicht würde, und da aber σ wesentlich kleiner als die Systemgröße N sein sollte um Finite-Size-Effekte klein zu halten, würde dies eine Vergrößerung des Systems erforderlich machen, was wiederum längere Rechenzeiten zur Folge hätte. Des Weiteren ist aufgrund des diskreten Gitters der Wert der Kohärenzlänge ξ nach unten beschränkt und sollte nicht weniger als fünf Gitterpunkte umfassen. Auch die Anzahl der Wellenlängen n_w , die das System umfasst ist nach unten begrenzt. Um also einen kleineren Wert für $k\xi$ zu wählen, müsste nach Gl. (150) ebenfalls die Systemgröße erhöht werden. Somit ist $k\xi = 0.02$ eine gute Wahl um in einer akzeptablen Rechenzeit alle drei Regime noch gut sichtbar zu machen. In Abbildung 29 sind die Messergebnisse der Simulation zusammen mit der theoretischen Kurve für die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit und den analytischen Grenzfällen für gauß-korrelierte Unordnung dargestellt. Dabei sind die Parameterwerte

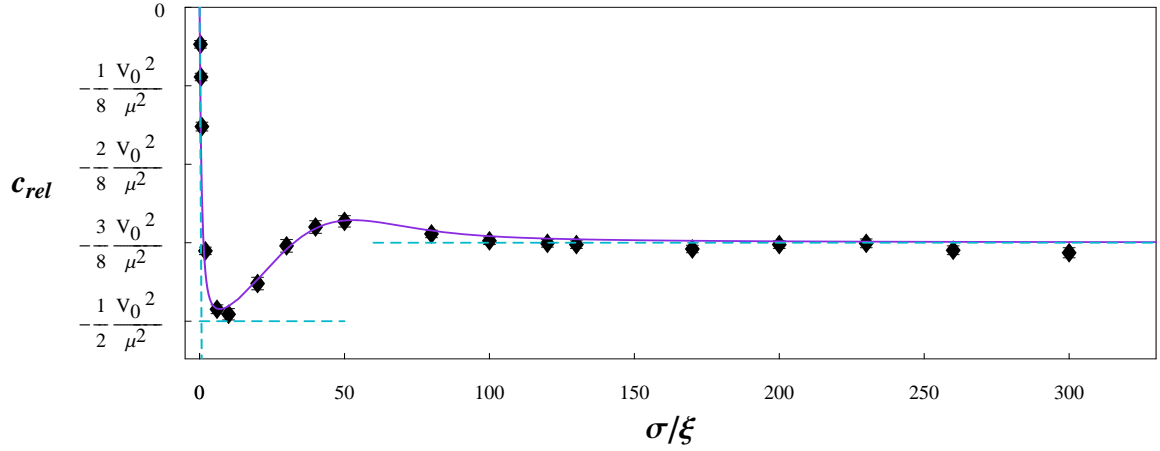


Abbildung 29: Messergebnisse der Simulation, theoretische Vorhersage (durchgezogene Linie) und analytische Grenzfälle (gestrichelt) für eine gauß-korrelierte Unordnung.

$V_0/\mu = 0.1$ und $\Delta = 0.03$ gewählt worden. Die Anregungsamplitude Δ muss hierbei kleiner sein als V_0/μ , da wir das Energiefunktional (79) nur bis zur quadratischen Ordnung in $\delta\varphi$ und δn entwickelt haben. D.h. der resultierende Hamiltonian (94) ist von der Ordnung $\mathcal{O}(\gamma^2)$ mit $\gamma \sim \Delta$. Wir haben also Terme der Ordnung $\mathcal{O}(\gamma^3)$ vernachlässigt, während wir Terme $\mathcal{O}(\gamma^2 V)$ berücksichtigt haben. Somit muss $\Delta \ll V_0/\mu$ gelten um unserer Theorie gerecht zu werden. Die dargestellten Fehler der Messpunkte sind dabei die statistischen Fehler. Der Fehler der relativen Korrektur zur Schallgeschwindigkeit

$$c_{rel} = \frac{\langle c \rangle - c_0}{c_0} \quad (155)$$

berechnet sich mittels Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$s_{c_{rel}} = \sqrt{\frac{s_{\langle c \rangle}^2}{c_0^2} + \frac{\langle c \rangle^2}{c_0^4} s_{c_0}^2}. \quad (156)$$

Dabei bezeichnet c_0 den Schallgeschwindigkeitswert aus der Simulation ohne Unordnungspotential, dessen Fehler sich aus der Differenz zum theoretischen Wert $c_{0theo} = \sqrt{\mu}$ ergibt:

$$s_{c_0} = c_0 - \sqrt{\mu}. \quad (157)$$

Der Mittelwert $\langle c \rangle$ bezeichnet dabei die Mittelung der Schallgeschwindigkeiten c_i der einzelnen Realisierungen:

$$\langle c \rangle = \frac{1}{n_r} \sum_{i=1}^{n_r} c_i, \quad (158)$$

wobei n_r die Anzahl der Realisierungen ist. Der statistische Fehler des Mittelwerts $\langle c \rangle$ ist

$$s_{\langle c \rangle} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n_r} (c_i - \langle c \rangle)^2}{n_r (n_r - 1)}}. \quad (159)$$

Wie aus Abbildung 29 hervorgeht, finden wir also eine sehr gute Übereinstimmung der Messergebnisse mit unserer theoretischen Vorhersage.

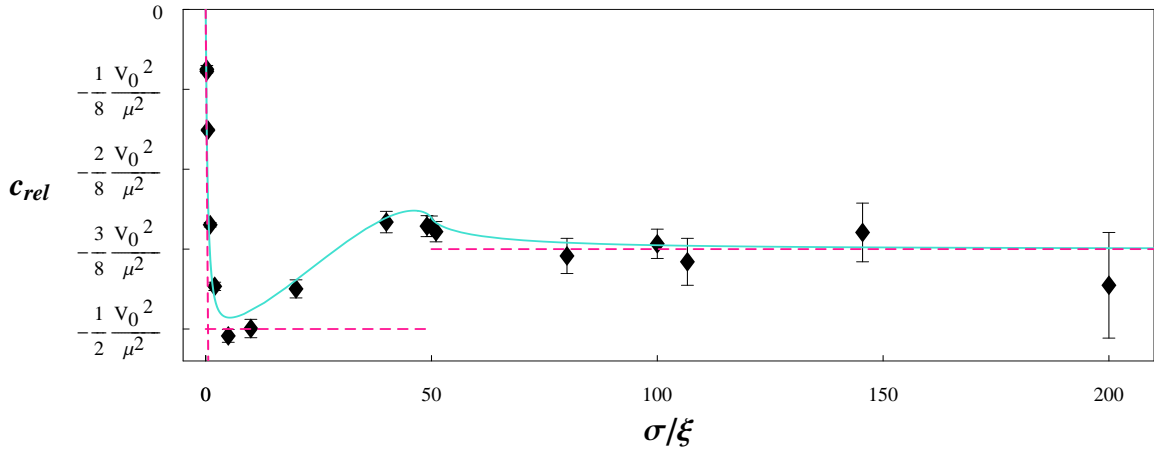


Abbildung 30: Messergebnisse der Simulation, theoretische Vorhersage (durchgezogene Linie) und analytische Grenzfälle (gestrichelt) für eine Speckle-Unordnung.

In Abbildung 30 sind die Ergebnisse der Simulation für eine Speckle-Unordnung, zusammen mit der theoretischen Korrektur zur Schallgeschwindigkeit und den analytischen Grenzfällen dargestellt. Aufgrund der Speckle-Statistik weist das Speckle-Unordnungspotential im Vergleich zur Gaußschen Unordnung viele hohe Potentialspitzen auf. Da man aber darauf achten muss, dass $V/\mu \ll 1$ auch für hohe Peaks noch erfüllt ist, ist für die Speckle-Messreihe ein kleinerer Wert $V_0/\mu = 0.03$ gewählt worden. Somit muss auch die Anregungsamplitude Δ , in diesem Fall $\Delta = 0.001$, kleiner gewählt werden um $\Delta \ll V_0/\mu$ zu gewährleisten. Dies hat zur Folge, dass die statistischen Schwankungen der Schallgeschwindigkeiten zunehmen, wie in Abbildung 30 zu sehen ist. Dies ließe sich durch eine größere Anzahl an Realisierungen beheben, was jedoch wieder sehr lange Rechenzeiten zur Folge hätte. Es ist noch zu erwähnen, dass die Anzahl an Realisierungen nicht für alle Messungen die Gleiche gewesen ist. Für den Bereich $\xi \ll 1/k \ll \sigma$ ist n_r kleiner gewählt worden als in den Anderen, da in diesem Bereich die Rechenzeiten je Realisierung sehr lange sind, weil für große Korrelationslängen auch ein großes System erforderlich ist. Somit sind in diesem Bereich auch die statistischen Fehler der Messpunkte größer als in den Anderen. Doch auch trotz dieser etwas größeren Fehler, zeigt sich in Abbildung 30 eine gute Bestätigung unserer theoretischen Vorhersage.

5.4 Ergänzung zur Theorie

Lediglich im Bereich $\sigma \ll \xi$ kommt es zu Abweichungen, sowohl für Gaußsche als auch für Speckle-Unordnung. Die Abbildungen 31 und 32 zeigen diesen Bereich noch einmal vergrößert und man erkennt eine scheinbar systematische Abweichung der Messpunkte nach oben verglichen mit der theoretischen Kurve. Diese Abweichungen stammen von einem zusätzlichen Bei-

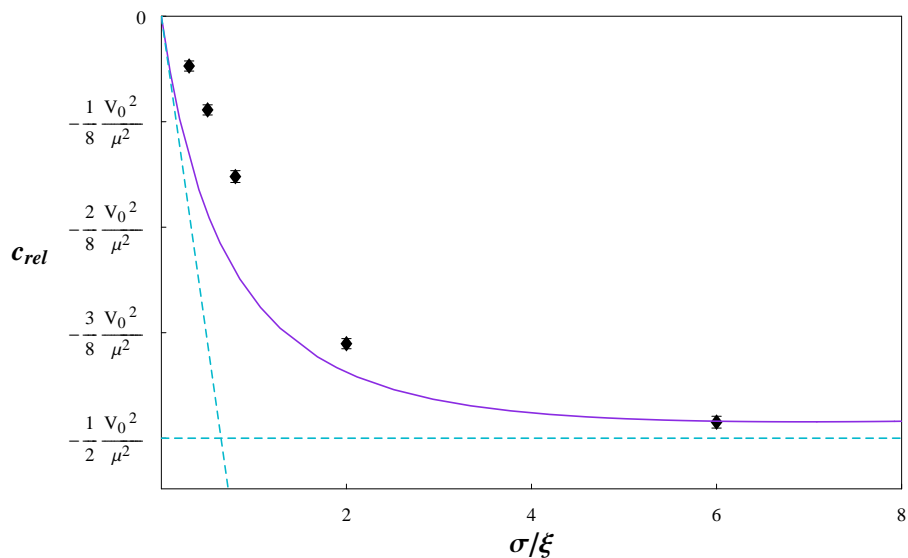


Abbildung 31: Messergebnisse der Simulation und theoretische Vorhersage für eine gauß-korrelierte Unordnung im Bereich kleiner Werte von σ/ξ .

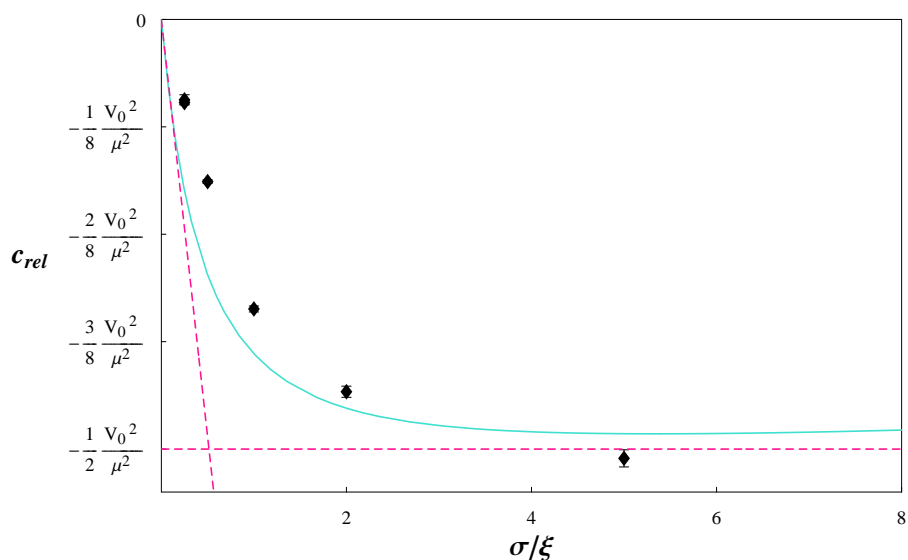


Abbildung 32: Messergebnisse der Simulation und theoretische Vorhersage für eine Speckle-Unordnung im Bereich kleiner Werte von σ/ξ .

trag zur Selbstenergie, der bei der Funktionalentwicklung, wie bereits erwähnt, vernachlässigt worden ist. Die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit ist von der Ordnung $\mathcal{O}(V^2)$. Somit muss für eine konsistente Störungsrechnung zweiter Ordnung in V das Energiefunktional (79) ebenfalls bis zur zweiten Ordnung in V entwickelt werden, was einen zusätzlichen Korrekturterm zum Realteil der Selbstenergie liefert. Die Berechnung dieses Beitrags wird im Folgenden skizziert.

Ausgangspunkt ist dabei wieder das Energiefunktional (79). Eine Entwicklung bis zur quadratischen Ordnung in δn und $\delta\varphi$ liefert wie gehabt:

$$E[\delta n, \delta\varphi] = E_0 + F[\delta n, \delta\varphi] + \mathcal{O}(\delta n, \delta\varphi)^3 \quad (160)$$

mit $F[\delta n, \delta\varphi]$ aus Gl. (87) mit dem Unterschied, dass die Grundzustandsdichte n_0 ebenfalls bis zur quadratischen Ordnung in V entwickelt werden muss:

$$n_0 = n_\infty (1 - \tilde{v} + n^{(2)}), \quad (161)$$

wobei $n^{(2)}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(V^2)$ ist. Die anschließende Entwicklung des Funktionals in V bis zur quadratischen Ordnung liefert nun einen zusätzlichen Term $F^{(2)}(\tilde{v})$ von der Ordnung $\mathcal{O}(V^2)$:

$$F(\tilde{v}) = F^{(0)} + F^{(1)}(\tilde{v}) + F^{(2)}(\tilde{v}) \quad (162)$$

mit $F^{(0)}$ und $F^{(1)}$ aus Gl. (89) und (90). Nach der in (93) definierten Bogoliubov-Transformation ergibt sich nun folgender Hamiltonian:

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (\epsilon_{\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}}^\dagger) + \frac{1}{L^{\frac{d}{2}}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(1)} + W_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(2)}) (\gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{\mathbf{k}'} + \gamma_{-\mathbf{k}} \gamma_{-\mathbf{k}'}^\dagger) \\ &+ \frac{1}{L^{\frac{d}{2}}} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} (Y_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(1)} + Y_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{(2)}) (\gamma_{-\mathbf{k}} \gamma_{\mathbf{k}'} + \gamma_{\mathbf{k}}^\dagger \gamma_{-\mathbf{k}'}^\dagger). \end{aligned} \quad (163)$$

Dabei bezeichnen $W^{(1)}$ und $Y^{(1)}$ die bereits berechneten Amplituden von der Ordnung $\mathcal{O}(V)$ aus Gl. (96) und (97). Zusätzlich dazu erhalten wir noch zwei Beiträge $W^{(2)}$ und $Y^{(2)}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(V^2)$. Mit diesen zusätzlichen Termen lässt sich die Bewegungsgleichung des Matrix-Propagators analog zu (107) formulieren:

$$G_0^{-1} \underline{G} = \mathbb{1} + \underbrace{\frac{2}{L^{\frac{d}{2}}} \begin{pmatrix} W^{(1)} + W^{(2)} & Y^{(1)} + Y^{(2)} \\ Y^{(1)} + Y^{(2)} & W^{(1)} + W^{(2)} \end{pmatrix}}_{\mathcal{V}} \underline{G}, \quad (164)$$

mit G_0 aus Gl. (107). Dies lässt sich wieder als Bornsche Reihe schreiben und nach der Unordnungsmittelung von \underline{G} zur Dyson-Gleichung (111) ordnen. Für die Selbstenergie Σ_{11} ergibt sich somit bis zur quadratischen Ordnung in V :

$$\Sigma_{11} = \frac{2}{L^{d/2}} \overline{W^{(1)}} + \frac{2}{L^{d/2}} \overline{W^{(2)}} + \frac{4}{L^d} \overline{W^{(1)} G_0^+ W^{(1)}} + \frac{4}{L^d} \overline{Y^{(1)} G_0^- Y^{(1)}}. \quad (165)$$

Da $W^{(1)} \sim V$, fällt dieser Term aufgrund von $\overline{V} = 0$ bei der Unordnungsmittelung weg. Für $W^{(2)}$ gilt jedoch $W^{(2)} \sim V^2$. Somit liefert $\overline{W^{(2)}}$ einen zusätzlichen Beitrag zum Realteil der Selbstenergie, in den die Korrelationsfunktion des Unordnungspotentials eingeht und der rein reell ist, da er keine Polstellen enthält. Nach etwas längerer Rechnung ergibt sich dieser Beitrag zu [24]:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \overline{W^{(2)}} = \frac{1}{8\pi} \frac{V_0^2}{\mu} \frac{\sigma}{\xi} \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + 2}} \int d\kappa' \left[\frac{2\kappa^2 + 3\kappa'^2}{(1 + \frac{1}{2}\kappa'^2)^2} C\left(\frac{\kappa'\sigma}{\xi}\right) \right]. \quad (166)$$

Diese Korrektur wirkt sich im Wesentlichen nur im Bereich $\sigma/\xi \approx 1$ aus und fällt, wie in Abbildung (33) zu sehen ist, für zunehmende σ/ξ sehr schnell ab. Somit hat der Beitrag $\overline{W^{(2)}}$

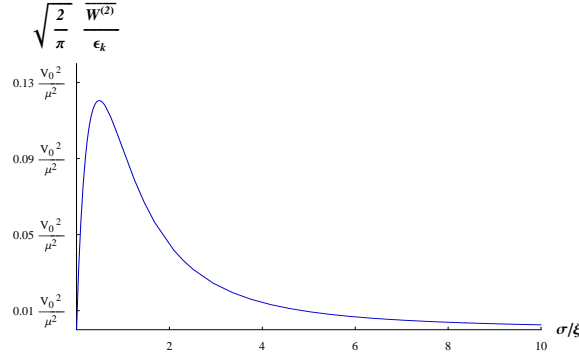


Abbildung 33: Korrekturterm $\sqrt{2/\pi} \overline{W^{(2)}}/\epsilon_k$ in Abhängigkeit der Korrelationslänge in Relation zur Kohärenzlänge.

keinen Einfluss auf die Grenzfälle $\xi \ll \sigma \ll 1/k$ und $\xi \ll 1/k \ll \sigma$. Jedoch liefert er eine Korrektur zum Grenzfall $\sigma \ll \xi$. In diesem Fall kann man die Korrelationsfunktion in (166) wieder als konstant annehmen mit der Konstanten $C(0)$. Die Linearisierung von (166) in κ und anschließendes Auswerten der Integrale liefert somit

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \overline{W^{(2)}} \stackrel{\sigma/\xi \rightarrow 0}{\approx} \frac{3}{8} \frac{V_0^2}{\mu} \frac{\sigma}{\xi} \kappa C(0). \quad (167)$$

Dies bedeutet für die relative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit im Grenzfall $\sigma \ll \xi$ unter Berücksichtigung von $(\overline{W^{(2)}})_{\sigma/\xi \rightarrow 0}$:

$$c_{rel} = -\frac{7}{16\sqrt{2}} \left(1 - \frac{6}{7}\right) \frac{V_0^2}{\mu^2} \frac{\sigma}{\xi} C(0) = -\frac{1}{16\sqrt{2}} \frac{V_0^2}{\mu^2} \frac{\sigma}{\xi} C(0). \quad (168)$$

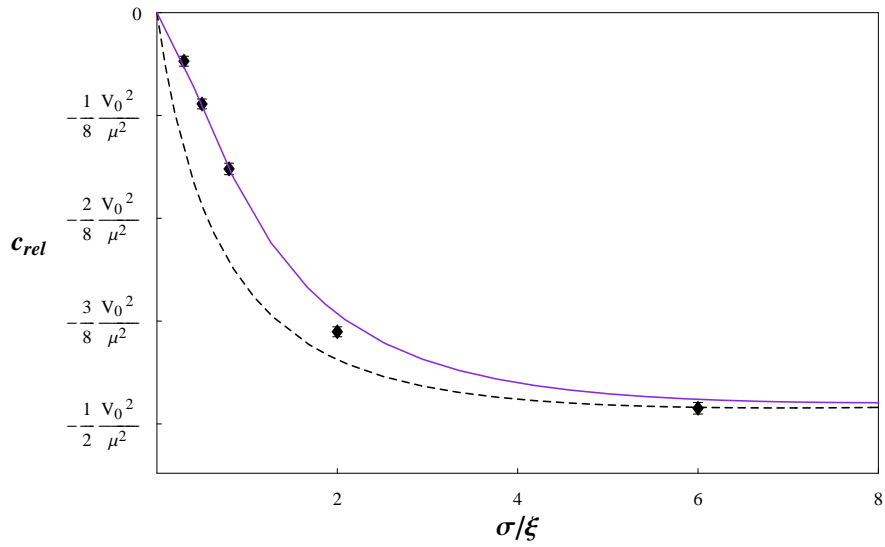


Abbildung 34: Korrigierte Schallgeschwindigkeitskorrektur (durchgezogene Linie) und ursprüngliche Kurve (gestrichelt) zusammen mit den Messergebnissen aus der Simulation für Gaußsche Unordnung.

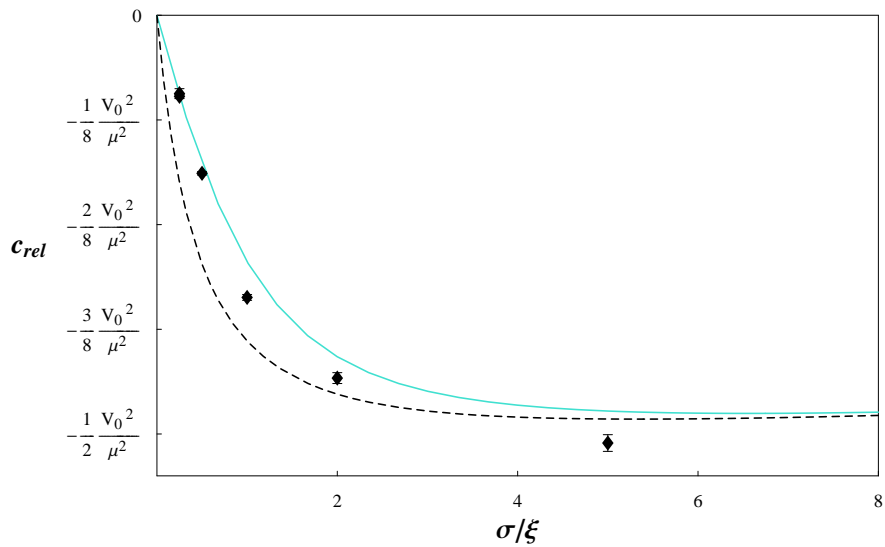


Abbildung 35: Korrigierte Schallgeschwindigkeitskorrektur (durchgezogene Linie) und ursprüngliche Kurve (gestrichelt) zusammen mit den Messergebnissen aus der Simulation für eine Speckle-Unordnung.

In den Abbildungen 34 und 35 sind die korrigierten theoretischen Kurven dargestellt und man sieht eine deutlich bessere Übereinstimmung der Messergebnisse aus der Simulation mit der theoretischen Vorhersage für kleine σ/ξ .

5.5 Weitere Verbesserungsmöglichkeiten

Nun können noch mögliche Fehlerquellen untersucht werden, die Abweichungen der Messwerte von der theoretischen Kurve hervorrufen können. Eine mögliche Fehlerquelle ist dabei das künstliche Erzwingen der Normierung $\bar{V} = 0$. Dies hat zum Einen Antikorrelationseffekte zur Folge und zum Anderen unterdrückt man dadurch Dichtefluktuationen von Realisierung zu Realisierung, wodurch es aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs von Schallgeschwindigkeit und Dichte $c \sim \sqrt{n}$ zu einer Verschiebung der mittleren Schallgeschwindigkeit kommen kann. Dabei handelt es sich um einen Finite-Size-Effekt, da diese künstliche Verschiebung des räumlichen Mittelwerts des Potentials bei jeder Realisierung um so kleiner ist, je größer das System im Verhältnis zur Korrelationslänge ist, über das gemittelt wird. In Abbildung 36 ist der Effekt der Antikorrelation graphisch dargestellt. Dabei sind die Autokorrelationsfunktionen der von der Simulation erzeugten Gaußschen Unordnungspotentiale für verschiedene Werte der Korrelationslänge σ in Relation zur Systemgröße N geplottet. Die Korrelationsfunktionen sind jeweils über die einzelnen Korrelationsfunktionen von 100 Unordnungsrealisierungen gemittelt. Die Systemgröße umfasst im diesem Fall $N = 8192$ Gitterpunkte.

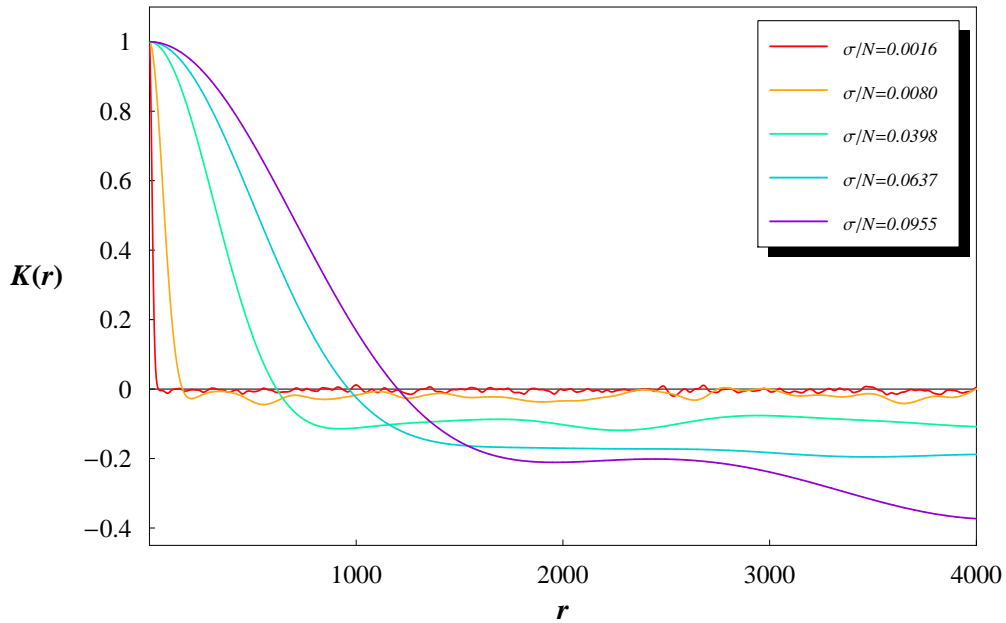


Abbildung 36: Gemittelte Autokorrelationsfunktionen für Gaußsche Unordnung im Ortsraum für verschiedene Werte der Korrelationslänge σ in Relation zur Systemgröße N .

Man erkennt deutlich die Antikorrelation für große Korrelationslängen, für kleine dagegen fallen die Antikorrelationen kaum noch ins Gewicht. Somit kann man durch ein entsprechend großes System diesen Fehler klein halten. Alternativ könnte man auch das Erzwingen der Normierung fallen lassen, müsste dann jedoch einen hohen Zeitaufwand in Kauf nehmen und die Anzahl an Realisierungen erhöhen um den dadurch entstehenden größeren statistischen Schwankungen entgegenzuwirken. Im Fall der Simulation mit Speckle-Unordnung haben wir stattdessen die Teilchenzahl konstant gehalten und dafür Änderungen im chemischen Potential zugelassen. Somit umgeht man die Problematik des Erzwingens der Normierung des

Potentials. Dafür muss man jedoch die theoretische Kurve anpassen, da wir in unserer Theorie großkanonisch mit festem μ rechnen. Diese Korrektur der theoretischen Kurve im Fall der Speckle-Unordnung ist bereits in den Abbildungen 30, 32 und 35 berücksichtigt worden. Die Berechnung dieser Korrektur findet sich im Anhang A.6.

Natürlich können auch Verbesserungen durch Erhöhung der Anzahl an Realisierungen, eine Vergrößerung des Systems und eventuell durch Erhöhung der Integrationszeit der Gross-Pitaevskii-Gleichung bei der Zeitentwicklung der Anregung erzielt werden. Weiterhin könnte noch das Verhalten der Schallgeschwindigkeit für kleinere Potentialstärken, kleineren Anregungsamplituden oder auch bei anderen Werten von $k\xi$ untersucht werden. Besonders im Fall einer Speckle-Unordnung lassen sich vermutlich bessere Ergebnisse produzieren, falls man kleinere Potentialstärken wählen würde. Denn das Speckle-Potential weist im Vergleich zum Gauß-Potential sehr viele unkontrolliert hohe Potentialpeaks auf, die die Bedingung $V/\mu \ll 1$ nicht erfüllen. Zusammenfassend bleibt jedoch zu sagen, dass wir durch die numerische Simulation eine gute Bestätigung unserer theoretischen Vorhersagen, sowohl im Fall gauß-korrelierter als auch für eine Speckle-Unordnung, erhalten haben.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben nun mit störungstheoretischen Methoden im Rahmen der Gross-Pitaevskii-Mean-Field-Theorie die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit im Bose-Einstein-Kondensat mit korrelierter Unordnung und kleinen Potentialstärken berechnet. Dies ist über die Berechnung der Selbstenergie des Systems im effektiven Medium erfolgt. Diese liefert eine Korrektur zur Bogoliubov-Dispersionsrelation, die für langwellige Anregungen des Kondensats linear verläuft. Unser System wird dabei durch drei relevante Längenskalen charakterisiert, die Kohärenzlänge ξ , die Korrelationslänge des Potentials σ und die Wellenlänge der Anregung $1/k$. Die Verhältnisse dieser Längenskalen zueinander beschreiben dabei unterschiedliche Regime. Grundvoraussetzung für schallartige Anregungen ist dabei die Bedingung $k\xi \ll 1$. Daraus ergeben sich die drei Möglichkeiten σ als größte, mittlere oder kleinste Längenskala zu wählen. In allen dieser drei Regime ergibt sich letztendlich eine negative Korrektur zur Schallgeschwindigkeit. Diese ist im Regime $\xi \ll 1/k \ll \sigma$, in dem nur Vorwärtsstreuung auftritt, betragsmäßig kleiner als im Regime $\xi \ll \sigma \ll 1/k$, in dem sowohl Vorwärts- als auch Rückstreuung auftritt, und verschwindet für $\sigma/\xi \rightarrow 0$, da in diesem Regime die Teilchendichte den starken Variationen des Potentials nicht mehr folgen kann und somit kaum noch von der Teilchendichte ohne Potential $n_\infty = \mu/g$ abweicht. Dieses Regime ist über die Theorie auf Basis der hydrodynamischen Wellengleichung nicht zugänglich gewesen. Aber in einer allgemeineren und verbesserten Beschreibung über die Entwicklung des Gross-Pitaevskii-Energiefunctionals haben wir Aussagen über die Schallgeschwindigkeit in allen drei Regimen treffen können und analytische Ausdrücke in den entsprechenden Grenzfällen hergeleitet. Da es uns noch nicht möglich ist auf experimentelle Daten zurückzugreifen, haben wir unsere Resultate mit den Ergebnissen einer numerischen Simulation zur Ausbreitung von Schallwellen verglichen. Diese numerischen Messungen haben unsere theoretischen Vorhersagen sowohl für Gaußsche als auch für eine Speckle-Unordnung sehr gut bestätigt. Aber wie in Abschnitt 5.5 ausgeführt, gibt es noch Möglichkeiten die Simulation zu verbessern oder mehr Zeit zu investieren um noch kleine Abweichungen von der theoretischen Vorhersage genauer zu untersuchen. Auch unsere theoretische Beschreibung offeriert eine Vielzahl an interessanten Fragestellungen. Beispielsweise bietet unsere allgemein für d Dimensionen gültige Theorie die Möglichkeit die Korrektur zur Schallgeschwindigkeit auch in höheren Dimensionen zu berechnen und zu untersuchen, ob signifikante Unterschiede zur Korrektur in einer Dimension auftreten, z. B. ein anderes Vorzeichen, wie es in [12] vorhergesagt wird. Des Weiteren beschränkt sich die Gültigkeit des Ausdrucks für die Selbstenergie nicht nur auf das Schall-Regime. Es bietet sich also auch die Möglichkeit unsere Beschreibung auf teilchenartige Anregungen anzuwenden und z.B. Auswirkungen von Unordnung auf die Massenkorrektur dieser Anregungen zu untersuchen. Somit lässt sich unsere Theorie auch auf andere Bereiche anwenden. Und da unsere theoretische Beschreibung, was die Schallgeschwindigkeitskorrektur betrifft, eine so gute Bestätigung in unserer Simulation gefunden hat, hoffen wir nun auch auf eine baldige experimentelle Bestätigung unserer Resultate.

A Anhang

In diesem Anhang werden die verwendeten Fourier-Transformationen definiert und Rechnungen, die in dieser Arbeit nicht explizit ausgeführt worden sind, dargestellt.

A.1 Definition der Fourier-Transformationen

Die in dieser Arbeit vorkommenden Fourier-Transformationen sind immer symmetrisch definiert:

$$f(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-d/2} \int d\mathbf{k} \left[\tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right], \quad \tilde{f}(\mathbf{k}) = (2\pi)^{-d/2} \int d\mathbf{r} \left[f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right], \quad (169)$$

$$f(\omega) = (2\pi)^{-1/2} \int dt \left[\tilde{f}(t) e^{-i\omega t} \right], \quad \tilde{f}(t) = (2\pi)^{-1/2} \int d\omega \left[f(\omega) e^{+i\omega t} \right], \quad (170)$$

Für die verwendeten diskreten Fourier-Transformationen gilt:

$$f(\mathbf{r}) = (L)^{-d/2} \sum_{\mathbf{k}} \left[\tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right], \quad \tilde{f}(\mathbf{k}) = (L)^{-d/2} \int d\mathbf{r} \left[f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right]. \quad (171)$$

A.2 Fourier-Transformation der Korrelationsfunktionen

Hier werden die in Abschnitt 2.1 definierte Gauß- und Speckle-Korrelationsfunktion fouriertransformiert.

- Transformation der Gauß-Korrelationsfunktion $\overline{V(r')V(r'+r)} = V_0^2 e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$

Mit $K(r/\sigma) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ und Gl. (5) erhält man

$$\begin{aligned} \overline{V_k V_{k'}} &= \delta(k + k') V_0^2 \int d\mathbf{r} \left(e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \right) \\ &= \delta(k + k') V_0^2 \int d\mathbf{r} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(r+i\mathbf{k}\sigma^2)^2} e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \\ &= \delta(k + k') V_0^2 \sqrt{2\pi} \sigma e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}. \end{aligned} \quad (172)$$

- Transformation der Speckle-Korrelationsfunktion $\overline{V(r')V(r'+r)} = V_0^2 \frac{\sin^2(r/\sigma)}{(r/\sigma)^2}$

Mit $K(r/\sigma) = e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ und Gl. (5) erhält man

$$\begin{aligned}\overline{V_k V_{k'}} &= \delta(k + k') V_0^2 \int dr \left[e^{-ikr} \frac{\sin^2\left(\frac{r}{\sigma}\right)}{\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2} \right] \\ &= \delta(k + k') V_0^2 \sigma^2 2 \int_0^\infty dr \left[\cos(kr) \frac{\sin^2\left(\frac{r}{\sigma}\right)}{r^2} \right].\end{aligned}\quad (173)$$

Mit der Fourier-Kosinus-Transformation (aus [21])

$$\int_0^\infty dt \left[\cos(\omega t) \frac{\sin^2(at)}{t^2} \right] = \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{1}{2}|\omega| \right) \theta \left(a - \frac{1}{2}|\omega| \right)$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}\overline{V_k V_{k'}} &= \delta(k + k') V_0^2 \sigma^2 2 \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{|k|}{2} \right) \theta \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{|k|}{2} \right) \\ &= \delta(k + k') V_0^2 \sigma \pi \left(1 - \frac{|k|\sigma}{2} \right) \theta \left(1 - \frac{|k|\sigma}{2} \right).\end{aligned}$$

A.3 Fourier-Transformation der Wellengleichung (45)

Hier wird die Wellengleichung

$$m \left[c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \delta n = \nabla \cdot (V(\mathbf{r}) \nabla \delta n) \quad (174)$$

in den \mathbf{k} - ω -Raum transformiert. Die Fourier-Darstellungen der Dichtefluktuation $\delta n(\mathbf{r}, t)$ und des Potentials $V(\mathbf{r})$ sehen dabei wie folgt aus:

$$\begin{aligned}\delta n(\mathbf{r}, t) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} \delta n(\mathbf{k}, \omega) \right], \\ V(\mathbf{r}) &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} V_{\mathbf{k}} \right].\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Wellengleichung (174) ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& m \left(c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} \delta n(\mathbf{k}, \omega) \right] \\
&= \nabla \cdot \left\{ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} V_{\mathbf{k}} \right] \nabla \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \frac{d\omega}{(2\pi)^{1/2}} \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} \delta n(\mathbf{k}, \omega) \right] \right\}; \\
& \\
& m \int d\mathbf{k} d\omega \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} \delta n(\mathbf{k}, \omega) m (\omega^2 - c^2 k^2) \right] \\
&= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} V_{\mathbf{k}} (-i\mathbf{k}) \right] \cdot \int d\mathbf{k} d\omega \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} \delta n(\mathbf{k}, \omega) (-i\mathbf{k}) \right] \\
&+ \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^{d/2}} \left(e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} V_{\mathbf{k}} \right) \cdot \int d\mathbf{k} d\omega \left[e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} \delta n(\mathbf{k}, \omega) (-\mathbf{k}^2) \right] \\
&= \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^{d/2}} d\mathbf{k}' d\omega \left[e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} e^{i\omega t} V_{\mathbf{k}'} \delta n(\mathbf{k}', \omega) (-\mathbf{k}' \cdot \mathbf{k}' - k'^2) \right] \\
&= \int \frac{d\mathbf{k}'}{(2\pi)^{d/2}} d\mathbf{k} d\omega \left[e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\omega t} V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \delta n(\mathbf{k}', \omega) (-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}') \right].
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt ist die Substitution $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} + \mathbf{k}'$ verwendet worden. Damit ergibt sich die Wellengleichung im \mathbf{k} - ω -Raum zu:

$$m(\omega^2 - c^2 k^2) \delta n(\mathbf{k}, \omega) = -(2\pi)^{-d/2} \int d\mathbf{k}' \left[V_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'} \delta n(\mathbf{k}', \omega) \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \right].$$

A.4 Fourier-Transformation von $\mathcal{V}'(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, t)$

Hier soll die Identität $(\mathcal{V}G)(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{F}(\mathcal{V}'(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, t))$ mit $\mathcal{V}'(\mathbf{r}) = [\nabla V(\mathbf{r})]\nabla + V(\mathbf{r})\nabla^2$ und $(\mathcal{V}G)(\mathbf{k}, \omega)$ aus Gl. (50) gezeigt werden. Mit den Fourier-Darstellungen

$$V(\mathbf{r}) = (2\pi)^{-d/2} \int d\mathbf{k} \left[V_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \right] \quad (175)$$

$$G(\mathbf{r}, t) = (2\pi)^{-(d+1)/2} \int d\mathbf{k} d\omega \left[G(\mathbf{k}, \omega) e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} e^{i\omega t} \right] \quad (176)$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}'(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, t) &= [\nabla V(\mathbf{r})]\nabla G(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\nabla^2 G(\mathbf{r}, t) \\
&= -(2\pi)^{-d-1/2} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega' \left[V_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}', \omega') \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} e^{i\omega t} \right] \\
&\quad - (2\pi)^{-d-1/2} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega' \left[V_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}', \omega') k'^2 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} e^{i\omega t} \right]. \quad (177)
\end{aligned}$$

Für die Fouriertransformierte $\mathcal{F}(\mathcal{V}'(\mathbf{r})G(\mathbf{r}, t))$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\mathcal{V}'(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, t)) &= \\
&= -(2\pi)^{-d/2} (2\pi)^{-d-1} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega' \left[V_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}', \omega') \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}' \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \delta(\omega' - \omega) (2\pi)^{d+1} \right] \\
&\quad - (2\pi)^{-d/2} (2\pi)^{-d-1} \int d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega' \left[V_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}', \omega') k'^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}' - \mathbf{k}'') \delta(\omega' - \omega) (2\pi)^{d+1} \right] = \\
&= -(2\pi)^{-d/2} \int d\mathbf{k}' \left[V_{\mathbf{k}''-\mathbf{k}'} G(\mathbf{k}', \omega) \mathbf{k}'' \cdot \mathbf{k}' \right] =: (\mathcal{V}G)(\mathbf{k}'', \omega). \tag{178}
\end{aligned}$$

A.5 Berechnung der Amplituden $A_{\kappa, \kappa'}^2$ und $A_{\kappa, -\kappa'}^2$

Hier werden die Amplituden $A_{\kappa, \kappa'}^2$ und $A_{\kappa, -\kappa'}^2$ aus Gleichung (124) berechnet.

- Berechnung von $A_{\kappa, \kappa}^2$

Mit (96) und (114) folgt für $A_{k, k}$:

$$A_{k, k} = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{\epsilon_k^0}{\epsilon_k} k^2 - \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k^0} k^2 \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{8m} \frac{\epsilon_k^{0^2} - \epsilon_k^2}{\epsilon_k^0 \epsilon_k}.$$

Unter Verwendung von $\xi^2 = \hbar^2/(2m\mu)$, $\epsilon_\kappa^0 = \mu\kappa^2$ und $\epsilon_\kappa = \mu\sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + 2)}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
A_{\kappa, \kappa} &= \frac{\mu}{4} \kappa^2 \frac{\mu^2 \kappa^4 - \mu^2 \kappa^2 (\kappa^2 + 2)}{\mu^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}} = \frac{\mu}{4} \frac{-2\kappa^2}{\sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}} \\
\Rightarrow A_{\kappa, \kappa}^2 &= \frac{\mu^2}{4} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + 2}.
\end{aligned}$$

- Berechnung von $A_{\kappa, -\kappa}^2$

Mit (96) und (114) folgt für $A_{k, -k}$:

$$A_{k, -k} = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{\epsilon_k^0}{\epsilon_k} 3k^2 + \frac{\epsilon_k}{\epsilon_k^0} k^2 \right) = \frac{\hbar^2 k^2}{8m} \frac{3\epsilon_k^{0^2} + \epsilon_k^2}{\epsilon_k^0 \epsilon_k}.$$

Unter Verwendung von $\xi^2 = \hbar^2/(2m\mu)$, $\epsilon_\kappa^0 = \mu\kappa^2$ und $\epsilon_\kappa = \mu\sqrt{\kappa^2(\kappa^2 + 2)}$ erhält man:

$$\begin{aligned}
A_{\kappa, -\kappa} &= \frac{\mu}{4} \kappa^2 \frac{3\mu^2 \kappa^4 + \mu^2 \kappa^2 (\kappa^2 + 2)}{\mu^2 \kappa^2 \sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}} = \frac{\mu}{4} \frac{2(2\kappa^4 + \kappa^2)}{\sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}} = \frac{\mu}{4} \frac{2\kappa^2 (2\kappa^2 + 1)}{\sqrt{\kappa^2 (\kappa^2 + 2)}} \\
\Rightarrow A_{\kappa, -\kappa}^2 &= \frac{\mu^2}{4} \frac{\kappa^2 (2\kappa^2 + 1)^2}{\kappa^2 + 2}.
\end{aligned}$$

A.6 Korrektur der theoretischen Kurve für konstante Teilchenzahl

Bei der Berechnung der Korrektur zur Schallgeschwindigkeit sind wir in unserer Theorie von einem festen chemischen Potential ausgegangen. Bei der numerischen Simulation im Fall einer Speckle-Unordnung jedoch haben wir die Teilchenzahl konstant gehalten, was impliziert, dass das chemische Potential sich ändert. Um nun die Resultate der Simulation mit unserer theoretischen Vorhersage vergleichen zu können, müssen wir unsere theoretische Kurve für die Schallgeschwindigkeit korrigieren.

Das chemische Potential aus unserer Theorie bezeichnen wir mit μ . Die Teilchendichte ohne Potential ist gegeben durch $n_\infty = \mu/g$ und die Schallgeschwindigkeit ohne Potential durch $c_0 = \sqrt{\mu/m}$. In der Simulation ist die Teilchenzahl N und somit auch die Teilchendichte n_∞ konstant. Für die Teilchendichte, entwickelt bis zur zweiten Ordnung in V , gilt die Relation

$$n = \frac{\mu}{g} (1 - \tilde{v} + n^{(2)}), \quad (179)$$

wobei $n^{(2)}$ von der Ordnung $\mathcal{O}(V^2)$ ist. Jedoch stellt sich in der Simulation nun ein anderes chemisches Potential μ' ein als in unserer Theorie verwendet, so dass die Teilchendichte im Unordnungsmittel konstant ist und somit folgende Relation erfüllt:

$$\overline{n_\infty} = \frac{\mu}{g} = \frac{\mu'}{g} \overline{(1 - \tilde{v} + n^{(2)})} = \frac{\mu'}{g} (1 + \overline{n^{(2)}}). \quad (180)$$

Somit erhält man bis zur zweiten Ordnung in V :

$$\mu' - \mu = -\mu \overline{n^{(2)}} + \mathcal{O}(V^3). \quad (181)$$

Die Schallgeschwindigkeit aus unserer Theorie mit festem μ bezeichnen wir im Folgenden mit c_μ , die aus der Simulation mit fester Teilchenzahl mit c_N . Nun berechnen wir die Korrektur zu c_μ/c_0 bis zur zweiten Ordnung in V , indem wir $c_N(\mu')/c_0$ um μ entwickeln und nur Terme bis zur Ordnung $\mathcal{O}(V^2)$ berücksichtigen. Dabei ist zu beachten, dass sowohl der Realteil der Selbstenergie $\Re(\Sigma(\mu'))$, als auch $\mu' - \mu$ von der Ordnung $\mathcal{O}(V^2)$ sind:

$$\begin{aligned} \frac{c_N}{c_0} &= \frac{\epsilon_k(\mu') + \Re(\Sigma)(\mu')}{\hbar k c_0} \\ &= \frac{1}{\hbar k c_0} \left[\Re(\Sigma)(\mu) + \epsilon_k(\mu) + \left. \frac{\partial \epsilon_k(\mu')}{\partial \mu} \right|_\mu (\mu' - \mu) + \mathcal{O}(V^3) \right]. \end{aligned} \quad (182)$$

Mit

$$\left. \frac{\partial \epsilon_k(\mu')}{\partial \mu'} \right|_\mu = \epsilon_k(\mu)/(2\mu) \quad (183)$$

und unter Verwendung von Gl.(181) erhält man:

$$\frac{c_N}{c_0} = \frac{c_\mu}{c_0} - \frac{1}{2} \overline{n^{(2)}}. \quad (184)$$

Somit folgt für die Korrektur zur theoretischen relativen Schallgeschwindigkeitskorrektur:

$$c_{rel,Simulation} = c_{rel,Theorie} - \frac{1}{2} \overline{n^{(2)}}, \quad (185)$$

mit $\overline{n^{(2)}}$ aus [24]:

$$\overline{n^{(2)}} = \frac{1}{8} \frac{\sigma}{\xi} \frac{V_0^2}{\mu^2} \int dq \frac{q^2}{(1 + \frac{1}{2} q^2)^2} \left(1 - \frac{|q|\sigma}{2\xi}\right) \theta\left(1 - \frac{|q|\sigma}{2\xi}\right). \quad (186)$$

B Verwendete Mathematica-Programme und Simulationsquellcode

Zur Erzeugung der in dieser Arbeit enthaltenen Graphiken ist *Mathematica* 5.2 verwendet worden. Die zu diesem Zweck erstellten Programme sind im Folgenden aufgelistet und sind auf der beiliegenden CD. Des Weiteren ist der Quellcode der verwendeten Simulation zur Ausbreitung von Schallwellen beigefügt.

Mathematica Programme:

- **Korrelationsfunktionen.nb** dient zur Generation der Gauß- und Speckle-Korrelationsfunktionen im Orts- und k -Raum (Abbildungen 4 und 5).
- **Dispersionsrelation.nb** dient zur Generation der Bogoliubov-Dispersionsrelation und der Grenzfälle der teilchen- bzw. schallartigen Anregungen (Abbildung 6).
- **Potential003.nb** dient zur Generation der Darstellungen eines Unordnungspotentials mit Korrelationslänge $\sigma = 0.03$ und der zugehörigen Teilchendichte des Kondensats aus den von der Simulation generierten Daten (Abbildung 7 unten).
- **Potential05.nb** dient zur Generation der Darstellungen eines Unordnungspotentials mit Korrelationslänge $\sigma = 0.5$ und der zugehörigen Teilchendichte des Kondensats aus den von der Simulation generierten Daten (Abbildung 7 rechts oben).
- **Potential20.nb** dient zur Generation der Darstellungen eines Unordnungspotentials mit Korrelationslänge $\sigma = 20$ und der zugehörigen Teilchendichte des Kondensats aus den von der Simulation generierten Daten (Abbildung 7 links oben).
- **CrelWellengleichungGauss.nb** dient zur Darstellung der relativen Korrektur zur Schallgeschwindigkeit (Abbildungen 8 und 9) und der korrigierten Dispersionsrelation (12 und 13) durch numerische Integration von Gl. (60) für Gaußsche Unordnung.
- **IntegrandWellengleichung.nb** dient zur qualitativen Darstellung des Integranden von Gl. (60) für kleine und große Korrelationslängen (Abbildungen ?? und 11).
- **SpeckleKorr.nb** dient zur Generation der Darstellung der Speckle-Korrelationsfunktion im k -Raum in Abhängigkeit von $\alpha = k\sigma$ (Abbildung 14).
- **RealteilSpeckleWellengleichungKsigma.nb** dient zur Darstellung der relativen Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für eine Speckle-Unordnung (Gl. (77), Abbildung 15).
- **ImaginaerteilSigma.nb** dient zur Darstellung des Imaginärteils der Selbstenergie (Abbildungen 16 und 17).
- **RealteilSigma.nb** dient zur Generation der Abbildungen der relativen Korrekturen zur Schallgeschwindigkeit für Gaußsche Unordnung durch numerische Integration der Gleichungen (128) und (60) (Abbildungen 18, 19, 20, 21 und 22).
- **IntegrandFunktional.nb** dient zur qualitativen Darstellung des Integranden von Gl. (128) (Abbildungen 23, 24 und 25).

- **RealteilSpeckle.nb** dient zur Darstellung der relativen Korrektur zur Schallgeschwindigkeit für eine Speckle-Unordnung durch numerische Integration von Gl. (128) (Abbildung 26).
- **UnordnungspotentialGauss.nb** dient zur Generation der Darstellung eines Gaußschen Unordnungspotentials aus den von der Simulation generierten Daten (Abbildung 27)
- **UnordnungspotentialSpeckle.nb** dient zur Generation der Darstellung eines Speckle-Unordnungspotentials aus den von der Simulation generierten Daten (Abbildung 28)
- **SimulationGauss.nb** dient zur Darstellung der relativen Korrektur zur Schallgeschwindigkeit und den Messdaten der Simulation für Gaußsche Unordnung (Abbildungen 29 und 31) und der Schallgeschwindigkeitskorrektur unter Einbeziehung des Korrekturterms $\overline{W^{(2)}}$ (Abbildung 34).
- **SimulationSpeckle.nb** dient zur Darstellung der relativen Korrektur der Schallgeschwindigkeit und den Messdaten der Simulation für eine Speckle-Unordnung (Abbildungen 30 und 32).
- **Korrektur.nb** dient zur Darstellung des Korrekturterms $\overline{W^{(2)}}$ (Abbildung 33) und der relativen Korrektur der Schallgeschwindigkeit für eine Speckle-Unordnung unter Einbeziehung von $\overline{W^{(2)}}$ (Abbildung 35).
- **AutocoMittelung.nb** dient zur Darstellung der Autokorrelationsfunktionen für Gaußsche Unordnung aus den Daten der Simulation (Abbildung 36).

Simulationsquellcode:

- **SpeedOfSound.C** ist der Quellcode des Simulationsprogramms.
- **disorderGenerator.C** dient zur Erzeugung des Unordnungspotentials und wird ins Hauptprogramm eingebunden.

Literatur

- [1] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation*. Oxford University Press, 2003.
- [2] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2002.
- [3] H. R. Glyde, O. Plantevin, B. Fåk, G. Coddens, P. S. Danielson, and H. Schober, “Dynamics of liquid $He4$ in vycor,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 2646–2649, Mar 2000.
- [4] D.-W. Wang, M. D. Lukin, and E. Demler, “Disordered Bose-Einstein condensates in quasi-one-dimensional magnetic microtraps,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 076802, Feb 2004.
- [5] D. Clément, A. F. Varón, J. A. Retter, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, “Experimental study of the transport of coherent interacting matter-waves in a 1d random potential induced by laser speckle,” *New Journal of Physics*, vol. 8, no. 8, p. 165, 2006.
- [6] P. W. Anderson, “Absence of diffusion in certain random lattices,” *Phys. Rev.*, vol. 109, pp. 1492–1505, Mar 1958.
- [7] K. Huang and H.-F. Meng, “Hard-sphere Bose gas in random external potentials,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 69, pp. 644–647, Jul 1992.
- [8] M. P. A. Fisher, P. B. Weichman, G. Grinstein, and D. S. Fisher, “Boson localization and the superfluid-insulator transition,” *Phys. Rev. B*, vol. 40, pp. 546–570, Jul 1989.
- [9] L. Sanchez-Palencia, D. Clement, P. Lugan, P. Bouyer, G. V. Shlyapnikov, and A. Aspect, “Anderson localization of expanding Bose-Einstein condensates in random potentials,” *Physical Review Letters*, vol. 98, no. 21, p. 210401, 2007.
- [10] V. I. Yukalov and R. Graham, “Bose-Einstein-condensed systems in random potentials,” *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, vol. 75, no. 2, p. 023619, 2007.
- [11] L. Zhang, “Disordered boson systems: A perturbative study,” *Phys. Rev. B*, vol. 47, pp. 14364–14373, Jun 1993.
- [12] S. Giorgini, L. Pitaevskii, and S. Stringari, “Effects of disorder in a dilute Bose gas,” *Phys. Rev. B*, vol. 49, pp. 12938–12944, May 1994.
- [13] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle, “Propagation of sound in a Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 79, pp. 553–556, Jul 1997.
- [14] M. R. Andrews, D. M. Stamper-Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle, “Erratum: Propagation of sound in a Bose-Einstein condensate [phys. rev. lett. 79, 553 (1997)],” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, p. 2967, Mar 1998.

- [15] M. Timmer, A. Pelster, and R. Graham, “Disorder-induced shift of condensation temperature for dilute trapped Bose gases,” *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 76, no. 5, pp. 760–766, 2006.
- [16] T. Schulte, S. Drenkelforth, J. Kruse, W. Ertmer, J. Arlt, K. Sacha, J. Zakrzewski, and M. Lewenstein, “Routes towards Anderson-like localization of Bose-Einstein condensates in disordered optical lattices,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 170411, Oct 2005.
- [17] R. Kuhn, *Coherent Transport of Matter Waves in Disordered Optical Potentials*. PhD thesis, Universität Bayreuth, Université de Nice Sophia Antipolis, 2007.
- [18] L. D. Landau and E. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Elsevier, 2007.
- [19] C. Gaul and C. A. Müller, “Anisotropic scattering of Bogoliubov excitations,” *Europhysics Letters*, vol. 83, p. 10006, 2008.
- [20] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-Body Quantum Theory in Condensed Matter Physics*. Oxford University Press, 2004.
- [21] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, G. Musiol, and H. Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik*. Verlag Harri Deutsch, 2001.
- [22] L. Sanchez-Palencia, “Smoothing effect and delocalization of interacting Bose-Einstein condensates in random potentials,” *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, vol. 74, no. 5, p. 053625, 2006.
- [23] P. Deuffhard and F. Dornemann, *Numerische Mathematik II: Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, Berlin, 2002.
- [24] C. Gaul, N. Renner, and C. Müller, “Bogoliubov dynamics in correlated disorder.” to be published.

Erklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Arbeit eigenständig und nur unter Benutzung der angegebenen Hilfsmittel und Quellen verfasst zu haben.

Bayreuth, den 13. Februar 2009,

.....