

Universität Bayreuth
Fakultät für Mathematik und Physik

Photon-Interferenz bei Streuung an verschränkten Atomen

Diplomarbeit aus dem
Fachbereich Physik

vorgelegt von

Torsten Scholak

Erstgutachter. Prof. Dr. Cord A. Müller
Zweitgutachter. Prof. Dr. Stephan Kümmel

Tag der Einreichung. 24. Januar 2008

ERKLÄRUNG GEMÄSS DER DIPLOMPRÜFUNGSORDNUNG. Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der in der Arbeit angegebenen Quellen und genannten Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Bayreuth, 23. Januar 2008

(Torsten Scholak)

ZUSAMMENFASSUNG. In dieser Arbeit wird ein Vorschlag zur Implementierung von Verschränkungszeugen mittels Ein-Teilchen-Interferenz vorgestellt. Nach Behandlung des allgemeinen Konzeptes werden mögliche Realisationen einerseits mit Elektronen in mesoskopischen Aharonov-Bohm-Ringen als auch mit Photonen und Atomen in der Youngschen Doppelspalt- sowie einer Doppelstreuanordnung diskutiert.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Einleitung	1
Kapitel 2. Quanteninterferometer	5
1. Äußere Freiheitsgrade und Welcher-Weg-Detektion	6
2. Sortierung von Messergebnissen	8
3. Quantendynamik des Interferometers	10
Kapitel 3. Interferenzmuster als Verschränkungszeuge	15
1. Verschränkungszeugen	17
2. Ansatz zur Realisation eines interferometrischen Verschränkungsdetektors	18
Schlussfolgerungen	23
Kapitel 4. Die Streuung an Festkörperstörstellen	25
1. Aharonov-Bohm-Ringe und der magnetische Aharonov-Bohm-Effekt	26
2. Magnetische Einschlüsse und Spin-Umklapp-Wechselwirkung	27
3. Realisierung des Singulettzeugen	28
4. Realisierung weiterer Zeugen	31
Schlussbemerkungen	36
Kapitel 5. Die Streuung an Atomen	39
1. Die Wechselwirkung zwischen Photon und Atom	40
2. Einfachstreuung	42
3. Doppelstreuung	50
Resümee	56
Kapitel 6. Zusammenfassung und Ausblick	59
Anhang A. Separabilität und Verschränkungsmaße	61
1. Verschränkte Quantenzustände	61
2. Quantifizierung von Verschränkung	62
3. Eine Ergänzung zu maximal verschränkten Zuständen	64
Literaturverzeichnis	65

Einleitung

Der äußere photoelektrische Effekt – oder das Freisetzen von Elektronen aus einer Metalloberfläche durch Licht – wurde von Einstein (1905, §8) erklärt, indem er die Maxwellsche Wellentheorie des Lichtes zumindest für dieses Phänomen ablehnte. Er stellte die These auf, die Energie des Lichtes sei diskontinuierlich im Raum verteilt und Lichtpartikel würden auf der Oberfläche des Körpers ein- und darin befindliche Elektronen heraus schlagen, sofern denn durch die Partikel genügend Energie zur Verrichtung der Austrittsarbeit eingebracht werde. Die Energie der Lichtpartikel sei bekannt aus der Planckschen Theorie der Schwarzkörperstrahlung. Den Partikeln wurde später der Name „Photonen“ gegeben.

Heute ist bekannt: Photonen sind masselos sowie transversal, bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit, haben einen Spin, tragen aber keine Ladung und wechselwirken nicht miteinander. Als elementare Anregungen des quantisierten elektromagnetischen Feldes können sie auch erzeugt und vernichtet werden. Beispiele sind die Streuung des Photons an einem freien Elektron oder die von Licht an Atomen.

Parallel ist Licht fähig zur Beugung, Reflexion, Brechung sowie Dispersion, es kann gestreut werden und besitzt eine Polarisierung. Die Beugung von Röntgenstrahlung an geordneten Strukturen wie Kristallen dient beispielsweise seit den Arbeiten von Max von Laue, William Henry Bragg und William Lawrence Bragg der Strukturanalyse.

Als Nachweis der Welleneigenschaften gilt das Auftreten von Interferenz. Denn diese wiederum beschreibt nach dem Superpositionsprinzip die Überlagerung von Wellen beliebiger Art, die sich auslöschen oder gegenseitig verstärken können. In diesem Zusammenhang wird gerne der Welle-Teilchen-Dualismus genannt, lange Zeit schon ein Synonym für das „gleichzeitige“ Vorliegen von Wellen- und Teilcheneigenschaften des Lichtes.

Bereits Schüler lernen das Doppelspaltexperiment kennen, welches die Dualität ebenso wie die Quantenphysik selbst veranschaulicht: Es demonstriert, dass Licht mit sich selbst interferiert, wenn es ein Paar von Spalten durchläuft. Es zeigt, dass selbst einzelne Photonen – eines nach dem anderen eintreffend – interferieren. Und es steht in dem Ruf, selbst den hartgesotenen Skeptiker von der Wahrheit der Quantenmechanik zu überzeugen:

Quantenobjekte existieren und zeigen ein Verhalten, das sich einer klassischen Interpretation widersetzt.

Ein spannendes Kapitel wird geöffnet, wenn in einem Gedankenexperiment der Versuch unternommen wird, den genauen Pfad des Photons von der Quelle bis zum Schirm zu verfolgen. Dies könnte mit folgender Abwandlung der historischen Anordnung gelingen: Die Schlitze des Interferometers werden ersetzt durch je ein Atom, an dem das Photon streuen könnte. Die Freiheitsgrade der Atome bilden ein Gedächtnis, in welchem durch die Wechselwirkung der Weg des Photons markiert wird. Je besser dies gelingt, desto schwächer ist das Interferenzbild ausgeprägt. Speichern sie die vollständige Weginformation, ist es zerstört. Dies ist unabhängig davon, ob der Zustand der Atome abgefragt wird oder nicht.

Eine Interpretation der Quantendualität anhand des Zwei-Wege-Interferometers lautet wie folgt: Die Sichtbarkeit der Interferenzfigur zeigt den Wellencharakter des Photons. Hingegen korrespondiert das vorhandene Wissen über den durch das Interferometer genommenen Pfad mit der Teilcheneigenschaft.

Es ergeben sich nun aufeinanderfolgend drei wesentliche Fragen:

Ist durch Ein-Teilchen-Interferenz etwas über die Atome herauszufinden? Es überrascht nicht, dass neben der Wechselwirkung auch der anfängliche Quantenzustand der Atome Auswirkungen auf die Effizienz ihres Gedächtnisses hat. Wenn die Atome dazu in der Lage sind, etwas über das Photon herauszufinden, ist umgekehrt die Frage berechtigt, ob nicht auch das Photon etwas über die Atome lernt.

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die grundsätzliche Frage, wieviel und welche Information über die verschiedenen Elemente eines zusammengesetzten Quantensystems – in diesem Beispiel der Atome – durch Streuung eines einzelnen Teilchens in Erfahrung gebracht werden kann. Ist es etwa möglich, aus der Interferenzfigur abzuleiten, ob Korrelationen zwischen den Atomen vorliegen?

In dieser umgedrehten Sichtweise stellt sich nun die Situation wie folgt dar: Das Photon ist ein Agent. Es nutzt die Quantenphysik, um in eine kohärente Superposition zweier Zustände zu gelangen, wobei jeder durch Wechselwirkung mit einem der zwei Atome festgelegt wird. Durch eine Polarisationsmessung kann das Photon zu seinem Zustand befragt werden. Das Ergebnis dieser Befragung teilt es dem Experimentator über den Kontrast des Interferenzbildes mit, welcher durch die Kohärenz der Superposition bestimmt ist. Die Idee ist, dass in diese Information Korrelationen der beiden besuchten Teilchen eingehen.

Prinzipiell ist dieses Vorgehen nichts Neues. Sowohl die Streuung als auch die Interferenz konnten sich in der Vergangenheit oft als nützlicher Informationslieferant erweisen. Neben der schon erwähnten Röntgenbeugung ist auch die Neutronenstreuung eine bewährte physikalische Methode zur Untersuchung kondensierter Materie.

Der Schwerpunkt ist hier jedoch ein anderer, denn die Betonung liegt auf der Interferenz und der Bestimmung feiner Unterschiede in den Korrelationen. Es ist nämlich bei weitem nicht abzusehen, ob mittels Ein-Teilchen-Interferenz klassische von quantenmechanischen Korrelationen unterschieden werden können.

Korrelationen, die klassisch nicht zulässig sind? Auf der Suche nach der Antwort auf die Frage, was das quantenmechanische Phänomen Verschränkung ausmacht, was Verschränkung eigentlich ist, finden sich in der Literatur viele mehr oder minder Auskunft gebende Meinungen. Schrödinger (1935a) schreibt: „Maximale Kenntnis von einem Gesamtsystem schließt nicht notwendig maximale Kenntnis aller seiner Teile ein, auch dann nicht, wenn dieselben völlig voneinander abgetrennt sind und einander zur Zeit gar nicht beeinflussen.“ Und weiter: „Das Ganze ist in einem bestimmten Zustand, die Teile für sich genommen nicht.“ In diesem Sinne werden auch heute solche nichtlokalen mit nichtklassischen, d.h. quantenmechanischen Korrelationen identifiziert. Wird Nichtlokalität also als eine „Voraussetzung“ für Verschränkung angesehen? Sicherlich nicht, Verschränkung taucht in der Formulierung der Quantenmechanik in natürlicher Weise auf und manifestiert sich in der Messung physikalischer Observablen: Korrelationen zwischen den in lokalen Messungen gewonnenen Erwartungswerten können nicht mehr mit klassischen Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden.

Einstein, Podolsky, u. Rosen (1935) hatten eine eigene, vergleichsweise ernüchternde Erklärung für dieses Paradoxon, welches unserer aus dem makroskopischen Alltag erwachsenen klassischen Realitätsauffassung widerspricht. Sie waren der Ansicht, dass die Quantenmechanik zwischen lokaler und nichtlokaler Quantenkorrelation unterscheiden sollte und darüber hinaus eine verschränkte Wellenfunktion die physikalische Realität nicht vollständig beschreibe, mehr noch, die Quantenmechanik unvollständig sei und legten die Existenz lokaler verborgener Variablen nahe, die einer deterministischen Interpretationen der Quantenmechanik dienen sollten.

Es handelte sich dabei jedoch um eine Fehlinterpretation: Bell (1964) zeigte neun Jahre nach Einsteins Tod, dass in einer um solche Variablen ergänzten allgemeinen Theorie die Erwartungswerte quantenmechanischer Observablen stets bestimmten Ungleichungen

– den sogenannten Bellschen Ungleichungen – genügen, die jedoch sowohl in der Formulierung der Quantenmechanik als auch im Experiment (Aspect u. a. 1982) deutlich verletzt werden.

Kann Verschränkung mittels Ein-Teilchen-Interferenz detektiert werden? Obwohl Verschränkung Voraussetzung und Baustein vieler Anwendungen der zur Zeit eine rasante Entwicklung erlebenden Quanteninformationsverarbeitung ist und dort beobachtbare, nützliche Konsequenzen hat, gibt es keine einfache Möglichkeit, sie zu quantifizieren. Die Ursache ist das Fehlen einer universellen quantenmechanischen Observable, deren Erwartungswert dies leisten könnte. Ist jedoch aufgrund der experimentellen Situation einschätzbar, welche verschränkten Quantenzustände nach einer Präparation vorliegen, eignen sich klar definierte, unter dem Namen „Verschränkungszeuge“ bekannte Observablen zum Nachweis der Einstein-Podolsky-Rosen-Korrelationen.

Tatsächlich wird im Verlauf dieser Arbeit gezeigt, dass der Interferenzkontrast eines Zwei-Wege-Interferometers mit dem Erwartungswert von Verschränkungszeugen übereinstimmen kann.

Zu Beginn soll dazu das Quanteninterferometer in einer auf den Arbeiten von Jaeger u. a. (1995) und Englert (1996) fußenden, abstrakten Weise formalisiert werden. Dies beinhaltet eine tiefe Auseinandersetzung mit der Theorie des Messens quantenmechanischer Observablen. Des Weiteren wird ein Zugang zur Beschreibung der Dynamik eines binären Interferometers präsentiert.

Erst Kapitel 3 greift Motivation und Fragestellung der Arbeit wieder auf. Sowohl Methode als auch Konzept werden darin unter experimentellen Gesichtspunkten verfeinert, um aus den Daten eines beliebigen Ein-Teilchen-Interferenzmusters den Erwartungswert einer effektiven Observablen abzuleiten. Diese operiert ausschließlich auf dem fraglichen Quantenzustand der beiden Zielteilchen und hängt von verschiedenen experimentellen Parametern ab.

In einem zweiten Teil wird anhand zweier Beispielszenarien geprüft, ob die effektive Observable prinzipiell in der Lage ist, Quantenkorrelationen zu detektieren. Dies markiert einen Punkt, ab dem an experimentelle Implementierung gedacht werden kann. Das Kapitel 4 beschäftigt sich zunächst mit einem mesoskopischen Szenario. Dabei steht die Wechselwirkung eines Elektrons mit zwei magnetischen Störstellen in einem Aharonov-Bohm-Interferometer im Mittelpunkt. Schließlich befasst sich Kapitel 5 mit der Situation der Photon-Interferenz bei Streuung an zwei identischen, verschränkten Atomen.

Die Diskussion einiger offener Fragen und möglicher Verallgemeinerungen bilden die Schlussworte der Forschungsarbeit, während der anschließend ausführlich in die Grundlagen der Verschränkungstheorie einführende Anhang A und das Literaturverzeichnis das Werk beenden.

Quanteninterferometer

Beim Youngschen Doppelspaltexperiment fällt monochromatisches, kohärentes Licht auf zwei Schlitze A und B in einer Blende. Die durch Beugung und Interferenz gebildeten Muster illustrierten erstmalig 1802 auf Thomas Youngs Schirm den *Welle-Teilchen-Dualismus*. Seitdem wurde das Experiment mit Elektronen (Tonomura u. a. 1989), Neutronen (Rauch u. Summhammer 1984; Summhammer u. a. 1987), Atomen oder sogar Fullerenen (Brezger u. a. 2002) wiederholt. Um nicht permanent von Teilchen und Wellen sprechen zu müssen, soll im weiteren Verlauf stattdessen einheitlich der Begriff *Quanton* verwendet werden. Verzichtet man auf die Berücksichtigung sämtlicher Feinheiten der Interferenzfigur, gilt für alle *symmetrischen 2-Wege-Interferometer* dieselbe mathematische Beschreibung: Das Interferenzmuster auf dem Schirm lässt sich auf den Quanton-Zustandsvektor

$$(2.1) \quad |\psi\rangle_Q = \frac{1}{\sqrt{2}} (|A\rangle_Q + |B\rangle_Q)$$

bzw. den Dichteoperator

$$(2.2) \quad \rho_Q = |\psi\rangle_{QQ}\langle\psi| = \frac{1}{2} (|A\rangle_{QQ}\langle A| + |B\rangle_{QQ}\langle B|) + \frac{1}{2} (|A\rangle_{QQ}\langle B| + |B\rangle_{QQ}\langle A|)$$

zurückführen, unabhängig davon, ob es sich nun um ein Doppelspalt- oder etwa ein Mach-Zehnder-Interferometer handelt: Im vorliegenden rein kinematischen Zugang sind alle Realisierungen binärer Alternativen äquivalent (Englert 1999). Die zugehörigen Vektoren $|A\rangle_Q$ und $|B\rangle_Q$ sind orthonormal und verkörpern die Amplituden der beiden sich gegenseitig ausschließenden Wege, die für (2.1) a priori gleich wahrscheinlich, d.h. ununterscheidbar sind, Abb. 2.1a. In (2.2) geben die beiden ersten diagonalen Terme die jeweiligen Einzelspaltbeiträge an, während das Interferenzmuster durch die Kohärenzen, also die gemischten Terme, induziert wird.

Die Detektionsintensität respektive das Interferenzmuster ist gegeben durch die Wahrscheinlichkeit $p(\phi) = |\langle\phi|\psi\rangle_Q|^2$, die Superposition

$$(2.3) \quad |\phi\rangle_Q = \frac{1}{\sqrt{2}} (|A\rangle_Q + e^{i\phi}|B\rangle_Q)$$

vorzufinden. ϕ ist die Phasendifferenz zwischen den beiden Wegalternativen. Es handelt sich um einen extern kontrollierbaren Parameter, im Doppelspaltexperiment ist ϕ der geometrieinduzierte Unterschied zwischen den optischen Weglängen. Ist das Interferometer in einer symmetrischen Superposition gleich wahrscheinlicher Pfade präpariert (2.1), ergibt sich die Detektionswahrscheinlichkeit zu

$$(2.4) \quad p(\phi) = \frac{1}{2} (1 + \cos \phi)$$

und zeichnet das Interferenzbild in Abhängigkeit von ϕ nach, Abb. 2.1b. Dessen *Sichtbarkeit* \mathcal{V} ist maximal, es gilt

$$(2.5) \quad \mathcal{V} = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\max} + p_{\min}} = 1.$$

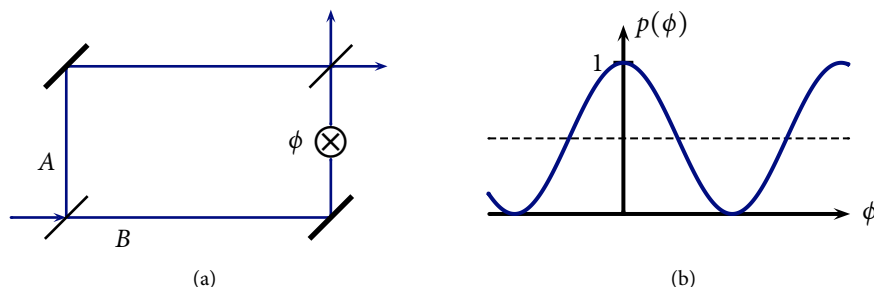


ABBILDUNG 2.1. Veranschaulichung am Beispiel des Mach-Zehnder-Interferometers. (a) Die Interferometer dieses Typs bestehen aus einem Strahlteiler gefolgt von zwei Spiegeln, die exakt so angeordnet sind, dass die reflektierten Strahlen an derjenigen Stelle zusammengeführt werden, an der ein weiterer Strahlteiler aufgestellt ist. So sind die Zustände auf den beiden Interferometerausgängen orthogonal und damit absolut unterscheidbar. Die Wirkung der Strahlteiler wird mathematisch durch jeweils ein sogenanntes (Walsh-)Hadamard-Gate beschrieben (Nielsen u. Chuang 2000). Ein *Quantengate* ist ein quantenmechanischer Schaltkreis, der für gewöhnlich auf einigen wenigen Qubits operiert. Das Hadamardgate ist somit eine Matrix. Die Matrix wiederum ist unitär und eine Realisierung der Hadamardtransformation, einer speziellen Klasse verallgemeinerter Fouriertransformationen, die jeden beliebigen Zustand in der Standardbasis in eine kohärente, gleichgewichtete Superposition von Zuständen überführt. So erklärt sich der Zusammenhang zu den Strahlteilern im Interferometer. Die Mach-Zehnder-Anordnung ist höchst sensitiv gegenüber relativen Phasenverschiebungen ϕ zwischen den beiden Interferometerarmen. Dabei kann die dargestellte Verschiebung \otimes phänomenologisch einen (optischen) Weglängenunterschied beschreiben, der auf die experimentelle Realisation des Interferometers zurückgeht, oder verkörpert denjenigen externen Kontrollparameter ϕ , der in der abstrakten Formulierung durch die Projektion auf den Zustand $|\phi\rangle_Q$ Einzug erhält. (b) Es wurde davon ausgegangen, dass das Quanton nach dem ersten Strahlteiler in der symmetrischen Superposition $|\psi\rangle$ ist, siehe die Definition (2.1). Durch die simple Rekombination der Alternativen ist der Interferenzkontrast maximal, $\mathcal{V} = 1$, und die Detektionswahrscheinlichkeit, die durch die Funktion $p(\phi)$ beschrieben wird, um den Ursprung zentriert.

1. Äußere Freiheitsgrade und Welcher-Weg-Detektion

Betrachten wir nun den Fall, in dem das Quanton-Qubit Q mit Freiheitsgraden der Umgebung interagiert und infolgedessen mit diesen verschränkt wird. Obwohl die quantitativen Aspekte des Welle-Teilchen-Dualismus in einigen Veröffentlichungen theoretisch untersucht worden sind, existieren nur vergleichsweise wenige experimentelle Belege für die Relevanz von Verschränkung bei der Quanteninterferenz. Beispielsweise stellten Dürr u. a. (1998) Nachforschungen an, warum die Interferenz in einem atomaren Interferometer vermag, wenn etwas über die realisierte Pfadalternative ausgesagt werden kann. Ein ganz ähnliches Experiment führten Schwindt u. a. (1999) durch, wo in einem Ein-Photonen-Interferometer die Polarisation verwendet wurde, um die Pfade zu markieren. Die in diesem Abschnitt vorgenommene Verallgemeinerung der bisherigen Situation, nämlich durch Einbeziehung externer, d.h. nicht ausschließlicher Pfad-Freiheitsgrade, trägt wesentlich zum

Verständnis der beobachteten quantenmechanischen Effekte bei. Dazu wollen wir im Zusammenhang mit der interferometrischen Wechselwirkung jedwede ungewollte und unberechenbare Störung ausklammern und folglich nur eine geringe Zahl äußerer Freiheitsgrade zulassen. Dies schließt bereits die Kopplung an ein Wärmebad und Schrödinger-Katzen (Schrödinger 1935b) aus. Kontrolliert der Experimentator die Wechselwirkung und besitzt er ausreichendes Wissen über die Umgebung, wird ihm das Sammeln von Pfadinformationen möglich. Die Umgebung fungiert dann als Pfaddetektor, in der der Pfad des Quantons aufgrund von EPR-Korrelationen (Einstein u. a. 1935) markiert wird¹. In Anlehnung daran soll dem Beispiel von Englert (1999) gefolgt und die äußeren Freiheitsgrade *Marker-System* M genannt werden.

Um die statistischen Eigenschaften von Messungen am System QM (bestehend sowohl aus Quanton als auch Marker) *nach* der Wechselwirkung korrekt vorherzusagen, lässt sich der hier bezüglich der Standardbasis $\{|A\rangle, |B\rangle\}$ des Quantons in Matrixform angegebene *universelle* Dichteoperator

$$(2.6) \quad \rho' = \begin{pmatrix} w \rho_M^A & \sqrt{w(1-w)} \chi_M^\dagger \\ \sqrt{w(1-w)} \chi_M & (1-w) \rho_M^B \end{pmatrix}$$

einsetzen, wobei der später erklärte statistische Parameter w im Intervall $[0; 1]$ liegen und $\rho_M^A - \chi_M^\dagger \chi_M$ wie auch $\rho_M^B - \chi_M \chi_M^\dagger$ positiv semidefinit sein müssen. Letzteres garantiert, dass alle von ρ' abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten nichtnegativ sind. ρ_M^A und ρ_M^B sind Zustände des Markers, χ_M beinhaltet dessen Kreuzterme. Die detaillierte zeitliche Entwicklung und die konkrete Form der Wechselwirkung spielen hier keine Rolle. Erst später im Abschnitt 3 soll die Dynamik des Quanteninterferometers näher untersucht werden.

Sei nun das Markersubsystem experimentell unzugänglich. Spürt man die Umgebung heraus² und betrachtet die reduzierte Dichtematrix des Quantons

$$(2.7) \quad \rho'_Q = \text{tr}_M \rho' = \begin{pmatrix} w & \sqrt{w(1-w)} \epsilon^* \\ \sqrt{w(1-w)} \epsilon & 1-w \end{pmatrix},$$

so beschreibt $\epsilon = |\epsilon| e^{i\alpha} = \text{tr} \chi_M$ die Kohärenz zwischen den Wegalternativen und α die Differenz ihrer Phasen, wobei wiederum die Kohärenz die Fähigkeit zur Interferenz angibt: Tatsächlich wird für ein Quanton im Zustand ρ'_Q das Interferenzmuster durch die Detektionsintensität

$$(2.8) \quad p'(\phi) = {}_Q\langle \phi | \rho'_Q | \phi \rangle_Q = \frac{1}{2} (1 + 2\sqrt{w(1-w)} \text{Re}(\epsilon^* e^{i\phi})) = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{V} \cos(\phi - \alpha))$$

und die Sichtbarkeit $\mathcal{V} = 2\sqrt{w(1-w)} |\epsilon|$ zutreffend beschrieben. Das Interferenzbild wird dabei um α verschoben. Weiterhin ist das Gewicht $w = w_A$ die Wahrscheinlichkeit, Weg A zu messen, während B mit Wahrscheinlichkeit $w_B = 1 - w$ auftritt.

In einem symmetrischen Interferometer (2.1) ist eine Vorhersage über eine Messung des Quantonpfades nur in der Hälfte der Fälle korrekt³. Bei der verallgemeinerten Form der Gl. (2.7) stimmt die Prognose nun in Abhängigkeit von w mit mehr oder weniger hoher Sicherheit. Man definiert (Englert 1996) die *Vorhersagbarkeit* \mathcal{P} der Pfade zu

$$(2.9) \quad \mathcal{P} = |w_A - w_B| = |2w - 1|.$$

Die Zustände $|A\rangle_Q$ und $|B\rangle_Q$ können nur dann interferieren, wenn wir weder wissen, noch prinzipiell herausfinden können, ob der Quantonzustand $|A\rangle_Q$ oder $|B\rangle_Q$ vorliegt, oder anders gesagt, welchen Weg das Quanton nimmt, d.h. $\mathcal{P} < 1$. Verschränkung

¹Zu den EPR-Korrelationen bzw. quantenmechanischer Verschränkung enthält auch der Anhang A reichlich Informationen.

²Zustandsreduktion ist kein physikalischer Prozess, sondern ein gedanklicher, der die Änderung des Wissens um das System widerspiegelt. Siehe dazu die Diskussion von Englert (1999).

³Nach vielen Wiederholungen des Interferenzexperiments, d.h. Bilden von Ensembles.

zwischen Marker und Quanton zerstört die Interferenz, indem sie das Quanton dekohärieren lässt: Eine geeignete Messung des Markers erlaubt, zusätzliches Wissen zu erlangen und macht die Wege unterscheidbarer. Andere Messungen vermögen jedoch eventuell, Interferenz wiederherzustellen. Betrachten wir als instruktives Beispiel den Zustand $|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|A\rangle_Q \otimes |A\rangle_M + |B\rangle_Q \otimes |B\rangle_M)$ mit den perfekt unterscheidbaren (orthonormalen) Markerzuständen $|A\rangle_M$ und $|B\rangle_M$. $|\psi'\rangle$ beschreibt maximale Verschränkung von Marker und Quanton, denn die Markerzustände sind jeweils mit den Amplituden $|A\rangle_Q$ und $|B\rangle_Q$ der Wegalternativen maximal korreliert. Wird der Zustand des Markers durch eine Messung auf $|A\rangle_M$ reduziert, so wird dem Pfad A Realität zugewiesen, wird der Marker jedoch in $|B\rangle_M$ vorgefunden, so wird Weg B präpariert. Anders gesagt, zu wissen, dass der Marker im Zustand $|A\rangle_M$ oder $|B\rangle_M$ ist, ist gleichbedeutend damit, zu wissen, dass das Quanton den Zustand $|A\rangle_Q$ respektive $|B\rangle_Q$ einnimmt. Die Verschränkung der Systeme in $|\psi'\rangle$ erzeugt eine Situation, in der die Kohärenz von $|A\rangle_Q$ und $|B\rangle_Q$ verschwunden ist, da durch Messung des Markers zuverlässig herausgefunden werden kann, in welchem Zustand das Quanton ist. Es ist $\rho'_Q = 1/2$ und der Interferenzkontrast \mathcal{V} beträgt Null.

Auf den ersten Blick mag dieses Ergebnis verwundern, denn $|\psi'\rangle$ ist ein reiner Zustand mit einer festen Phasenbeziehung zwischen dem $|A\rangle_Q$ und dem $|B\rangle_Q$ enthaltenden Term. In der Interferometrie klassischer Wellen garantiert eine fest bestimmte Phasenbeziehung eine klar sichtbare Interferenzfigur. Warum sollte das hier anders sein? Natürlich missachtet man mit diesem Argument die Verschränkung im System. Die Phasenbeziehung besteht in $|\psi'\rangle$ zwischen Zuständen eines zweiteiligen Quantensystems. Bei alleiniger Beobachtung des Quantons ρ'_Q – dies kommt einem Herausspuren M's gleich – geht die Phasenbeziehung verloren.

Stellen wir uns nun vor, es würde nicht auf die orthogonalen Zustände $|A\rangle_M$ oder $|B\rangle_M$, sondern stattdessen auf eine kohärente Superposition der beiden, beispielsweise mittels des Projektors $\hat{P}_M = \frac{1}{2}(|A\rangle_M + |B\rangle_M)(\langle A| + \langle B|)$, projiziert. Dann kann der Experimentator für in dieser Superposition durch die Messung präparierte Subensembles die vollständige Kohärenz des Quantons wiederherstellen, es ist

$$(2.10) \quad \rho'_Q = 2 \operatorname{tr}_M [\hat{P}_M |\psi'\rangle \langle \psi'|] = \frac{1}{2}(|A\rangle_Q \langle A| + |A\rangle_Q \langle B| + |B\rangle_Q \langle B| + |B\rangle_Q \langle A|) = \rho_Q.$$

Die Weginformation des Markers wurde *gelöscht* und die Interferenzfigur für dieses Subensemble ist maximal sichtbar. Man nennt diese Konstellation einen *Quantenradierer* (Dürr u. Rempe 2000; Schwindt u. a. 1999).

2. Sortierung von Messergebnissen

Diskutieren wir den Fall, in dem der Experimentator eine von-Neumann-konforme Messung (z.B. Preskill 1998, Kap. 3.1.1) einer Observable \hat{O}_M auf dem Markersubsystem durchführt. Dies stellt eine Verallgemeinerung der soeben im Rahmen der Quantenradierung diskutierten projektiven Messung dar, denn wir betrachten jetzt statt einer einzelnen projektiven Observable \hat{P}_M mit Eigenwerten 0 und 1 eine beliebige Observable \hat{O}_M mit vielen verschiedenen Eigenwerten k aus dem Spektrum $\sigma(\hat{O}_M)$. Zu jedem Eigenwert gehört dann ein eigener Unterraum. Je nach Ergebnis der Messung, d.h. je nach gefundenem Eigenwert, kann Verschränkung zwischen Quanton und Marker dazu beitragen, dass diesen Unterräumen bzw. dem durch die Messung präparierten Zustand des Markers ein assoziierter Zustand des Quantons zugeordnet werden kann. Dies ist im Wesentlichen wie zuvor im Rahmen der Quantenradierung diskutiert zu verstehen.

Wie können wir nun diese Sortierung vornehmen? Betrachten wir dazu

$$(2.11) \quad \hat{O}_M = \sum_{k \in \sigma(\hat{O}_M)} k \hat{P}_M^{(k)}.$$

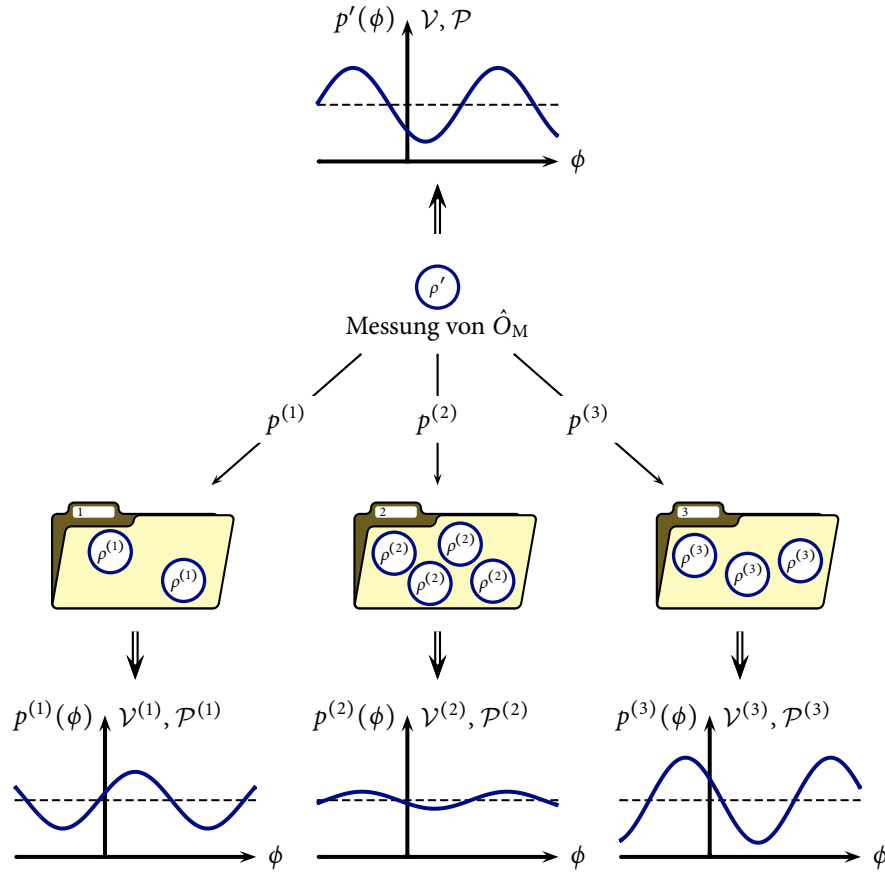


ABBILDUNG 2.2. Abhängig vom Ergebnis der Messung der Markerobservable \hat{O}_M wird eine Sortierung in die mit den Eigenwerten $k = 1, 2, 3$ etikettierten und hier als Ordner dargestellten Subensembles durchgeführt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ρ' dem k -ten Subensemble zugeordnet wird, beträgt $p^{(k)} = \langle \hat{P}_M^{(k)} \rangle_{\rho'}$. Jedem Subensemble können eigene interferometrische Kenngrößen zugeordnet werden, beispielsweise Sichtbarkeit $\mathcal{V}^{(k)}$, Vorhersagbarkeit $\mathcal{P}^{(k)}$ und Verschiebung $\alpha^{(k)}$. Im Allgemeinen unterscheiden sie sich von den unsortierten Größen.

Es handelt sich dabei um die spektrale Zerlegung der Markerobservablen. Die Eigenwerte k können sowohl entartet als auch eindeutig (nichtentartet) sein. Die Projektoren $\hat{P}_M^{(k)}$ selektieren die zu den Eigenwerten gehörenden Unterräume: Sie sind paarweise orthonormal, $\hat{P}_M^{(k)} \hat{P}_M^{(l)} = \delta_{kl} \hat{P}_M^{(k)}$, vollständig, $\sum_k \hat{P}_M^{(k)} = \mathbb{1}_M$, und ihre Spur $\text{tr} \hat{P}_M^{(k)}$ gibt die algebraische (und geometrische) Vielfachheit des jeweiligen assoziierten Eigenwertes an⁴.

Im Experiment wird bei der Messung von \hat{O}_M der Eigenwert k mit der Wahrscheinlichkeit

$$(2.12) \quad p^{(k)} = \langle \hat{P}_M^{(k)} \rangle_{\rho'_M} = w \langle \hat{P}_M^{(k)} \rangle_{\rho_M^A} + (1-w) \langle \hat{P}_M^{(k)} \rangle_{\rho_M^B}$$

⁴Man könnte statt der speziell mit einer von-Neumann-Messung verknüpften Projektoren auch eine vollständige Menge nicht orthogonaler, positiver Operatoren diskutieren: die so genannten *positive operator valued measures*, kurz POVMs. Die Anzahl der Elemente in einem POVM ist im Allgemeinen also größer als die Dimension des Hilbertraums, auf dem sie operieren.

erhalten. Der auf den Fund von k konditionierte Zustand des Quantons, der die statistischen Eigenschaften des Subsystems Q nach erfolgter Messung beschreibt, lautet

$$(2.13a) \quad \rho_Q^{(k)} = \frac{1}{p^{(k)}} \operatorname{tr}_M[\hat{P}_M^{(k)} \rho']$$

$$(2.13b) \quad = \frac{1}{p^{(k)}} \begin{pmatrix} w \langle \hat{P}_M^{(k)} \rangle_{\rho_M^A} & \sqrt{w(1-w)} \operatorname{tr}[\hat{P}_M^{(k)} \chi_M^\dagger] \\ \sqrt{w(1-w)} \operatorname{tr}[\hat{P}_M^{(k)} \chi_M] & (1-w) \langle \hat{P}_M^{(k)} \rangle_{\rho_M^B} \end{pmatrix}$$

$$(2.13c) \quad = \begin{pmatrix} w^{(k)} & \sqrt{w^{(k)}(1-w^{(k)})} \epsilon^{(k)*} \\ \sqrt{w^{(k)}(1-w^{(k)})} \epsilon^{(k)} & 1-w^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Der Experimentator kann nun Quanton-Qubits $\rho_Q^{(k)}$ nach k sortieren oder, anschaulich gesprochen, in mit k beschriftete Ordner ablegen, wobei jedem Subensemble ein eigenes Interferenzmuster mit Sichtbarkeit $\mathcal{V}^{(k)}$ und Vorhersagbarkeit $\mathcal{P}^{(k)}$ innewohnt und verschiedene Wahlen der Observablen \hat{O}_M verschiedene Sortierungen implizieren, Abb. 2.2.

3. Quantendynamik des Interferometers

Im Folgenden soll über die sich schnell für konkrete Probleme als unzureichend herausstellende rein kinematische Beschreibung des Abschnitts 1 hinausgegangen werden. Nach einem der Grundpostulate der nichtrelativistischen Quantenmechanik wird die Dynamik eines abgeschlossenen Quantensystems durch die Schrödingergleichung bzw. durch die Abbildung $\rho \mapsto U\rho U^\dagger$ bestimmt, wobei U der übliche, auf dem Hamiltonoperator beruhende Zeitentwicklungsoperator ist. Somit sind Zustände zu verschiedenen Zeiten unitär äquivalent und reine Zustände bleiben rein. Es ist klar, dass wir diese Aussagen revidieren müssen, wenn wir selektive, projektive Messungen, Dekohärenz, also die Entwicklung eines reinen in einen gemischten Zustand, oder allgemein die Evolution eines Teilsystems unter globaler unitärer Dynamik behandeln wollen. Falls Verschränkung im Spiel ist, verhält sich ein reiner Zustand des Gesamtsystems wie ein gemischter Zustand, wenn nur ein Subsystem beobachtet wird. Und falls sich das Gesamtsystem unitär in der Zeit entwickelt, wird die Zeitentwicklung seiner Teile im Allgemeinen dekohärent sein. Oftmals lässt sich dies zumindest in guter Näherung mittels einer Differentialgleichung beschreiben, der phänomenologisch begründeten Mastergleichung (z.B. Cohen-Tannoudji u. a. 1998, Kap. IV). Begibt man sich jedoch auf einen axiomatischen Standpunkt und diskutiert die grundsätzliche Frage, welche Quantenoperationen Dynamik zutreffend beschreiben – handelt es sich nun um gekoppelte Teilsysteme oder nicht –, so wird man sich allen denkbaren Abbildungen zwischen Quantenzuständen widmen, die in widerspruchsfreier Beziehung zur statistischen Interpretation der Quantentheorie stehen. Die allgemeinste Quantenoperation, die einen Quantenzustand in einen anderen transformiert, ist eine probabilistische oder stochastische physikalische Operation der Form

$$(2.14) \quad \rho \mapsto \Lambda(\rho)$$

mit einem *Superoperator* Λ . Superoperatoren sind lineare, spurerhaltende Abbildungen, wobei der Verzicht auf die Linearitätsvoraussetzung problematisch wäre, da er absurde Resultate hervorbringen und eine konsistente Wahrscheinlichkeitsinterpretation verhindern kann (siehe Preskill 1998, Kap. 3.2.2). Man fordert weiterhin, dass Λ *vollständig positiv* ist. Diese Eigenschaft soll anhand ihrer Motivation kurz erklärt werden. Wenn man die Dynamik eines Quantensystems auf dem Hilbertraum \mathcal{H} untersucht, ist naturgemäß nicht auszuschließen, dass weitere Systeme \mathcal{K} existieren, die nicht an ersteres koppeln, deshalb unentdeckt bleiben und sich der Beschreibung entziehen. Nur wenn $\Lambda \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}}$ positiv für alle Zustandsraumweiterungen der Form $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ ist, das System in \mathcal{H} also eine Dynamik erfährt, ein solches in

\mathcal{K} aber nicht, entwickelt sich die Dichtematrix des Gesamtsystems zu einer anderen Dichtematrix konsistent weiter. Λ heißt dann vollständig positiv.

Superoperatoren liefern uns in Form der *Quantum Channels* den Formalismus, in dem wir Dekohärenz diskutieren können. Ein Quantenkanal ist einfach ein Übertragungskanal, der Quanteninformation übermitteln kann. Nach dem Ausdehnungssatz von Stinespring (1955) kann jede vollständig positive und zugleich spurerhaltende Abbildung, d.h. jeder Superoperator oder Quantenkanal, nach folgendem, auf grundlegenden Operationen basierendem Rezept dargestellt werden: Zunächst wird der Zustandsraum des Gesamtsystems erweitert. Dies geschieht durch tensorielles Hinzufügen eines fiktiven Helfersystems \mathcal{K} , welches sich in einem geeignet konstruierten Zustand $|0\rangle_{\mathcal{K}}$ aus der Orthonormalbasis $\{|\mu\rangle_{\mathcal{K}}\}$ befindet. Auf diesem vergrößerten System implementiert nun eine unitäre Transformation \mathbb{U} die spurerhaltende Abbildung. Anschließende Reduktion des Zustandsraumes auf die ursprüngliche Gestalt schließt das Verfahren ab. Dieser Vorschrift folgend kann man sich jede beliebige Quantenoperation als unitäre Transformation auf einem größeren System vorstellen. In diesem Sinne ist dieses Theorem das Gegenstück zu der Erkenntnis, dass ein Beobachter, der nur zu einem Teilsystem Zugang hat, Dekohärenz verzeichnet, obwohl das Gesamtsystem unitärer Zeitentwicklung unterliegt. Das zusätzliche System \mathcal{K} , welches mit dem bestehenden zu koppeln ist, wird üblicherweise mit *Ancilla*, also als Aushilfe, bezeichnet. Das optimale Repräsentationsverfahren von Stinespring liefert eine untere Schranke für die Dimension der Ancilla, $\dim \mathcal{K} \leq (\dim \mathcal{H})^2$, und ist eindeutig bis auf unitäre Äquivalenz auf \mathcal{K} .

Es soll nun die zeitliche Entwicklung in einem 2-Wege-Interferometer verallgemeinert formuliert werden (Oi u. Aberg 2006). Jede Pfadalternative beinhaltet einen Prozess, der Quanton und Marker koppelt. Wir werden diese Prozesse mit zwei *lokalen* Quantenkanälen Λ_A und Λ_B beschreiben. Diese fügen sich zu einem Quantenkanal Λ zusammen, der das gesamte Interferometer beschreibt. Lokal bedeutet in diesem Zusammenhang, dass jegliche Kopplung zwischen Λ_A und Λ_B und damit sowohl klassische sowie quantenmechanische Korrelationen als auch Transfer von Wahrscheinlichkeiten zwischen den Pfaden ausgeschlossen ist. In diesem Fall können wir nach Stinespring zur Darstellung beider Kanäle Ancillae $\mathcal{K}_A, \mathcal{K}_B$ mit Basen $\{|\mu\rangle_{\mathcal{K}_A}\}, \{|\nu\rangle_{\mathcal{K}_B}\}$ einführen, die an die Pfade A, B über die unitären Transformationen $\mathbb{U}_A, \mathbb{U}_B$ geknüpft sind. Die Implementierung der Kanäle lautet dann

$$(2.15a) \quad \Lambda_A(\rho_M) = \text{tr}_{\mathcal{K}_A} [\mathbb{U}_A (|0\rangle_{\mathcal{K}_A \mathcal{K}_A} \langle 0| \otimes \rho_M) \mathbb{U}_A^\dagger]$$

beziehungsweise

$$(2.15b) \quad \Lambda_B(\rho_M) = \text{tr}_{\mathcal{K}_B} [\mathbb{U}_B (\rho_M \otimes |0\rangle_{\mathcal{K}_B \mathcal{K}_B} \langle 0|) \mathbb{U}_B^\dagger].$$

$|0\rangle_{\mathcal{K}_A}$ und $|0\rangle_{\mathcal{K}_B}$ spielen die Rolle von Anfangszuständen für die Hilfssysteme \mathcal{K}_A bzw. \mathcal{K}_B . Ein Corollar des Satzes von Stinespring ist die Zerlegung von Superoperatoren in Summen von sogenannten Krausoperatoren (Kraus 1983), die von der Urbild- auf die Bildmenge des Kanals abbilden. Ausgedrückt mit Hilfe der unitären Operatoren \mathbb{U}_A und \mathbb{U}_B lauten sie für den Pfad A

$$(2.16a) \quad \mathbb{T}_A^{(\mu)} = \text{tr}_{\mathcal{K}_A} [\mathbb{U}_A (|0\rangle_{\mathcal{K}_A \mathcal{K}_A} \langle \mu| \otimes \mathbb{1}_M)] = \mathcal{K}_A \langle \mu| \mathbb{U}_A |0\rangle_{\mathcal{K}_A}$$

und für die Wegalternative B

$$(2.16b) \quad \mathbb{T}_B^{(\nu)} = \text{tr}_{\mathcal{K}_B} [\mathbb{U}_B (\mathbb{1}_M \otimes |0\rangle_{\mathcal{K}_B \mathcal{K}_B} \langle \nu|)] = \mathcal{K}_B \langle \nu| \mathbb{U}_B |0\rangle_{\mathcal{K}_B}.$$

Nach Konstruktion erfüllen sie $\sum_\mu \mathbb{T}_A^{(\mu)\dagger} \mathbb{T}_A^{(\mu)} = \sum_\nu \mathbb{T}_B^{(\nu)\dagger} \mathbb{T}_B^{(\nu)} = \mathbb{1}_M$ und sind linear unabhängig, sofern sie aus der optimalen Stinespringzerlegung hervorgehen. An der Definition der Krausoperatoren kann man auch die Rolle der Zustände der beiden Hilfssysteme erkennen: Beispielsweise beschreibt $\mathbb{T}_A^{(\mu)}$ die Propagation des Markersystems M unter der

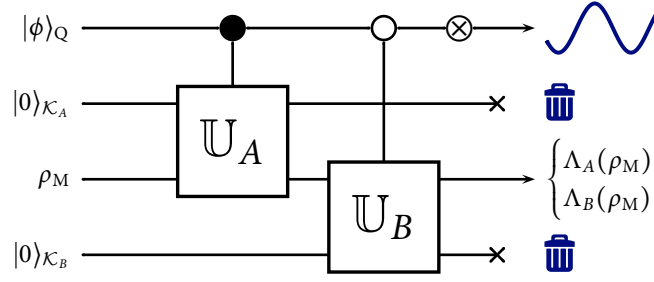


ABBILDUNG 2.3. Grafische Repräsentation für den Quantenkanal Λ formuliert über die pfadkonditionierten (\bullet , \circ), unitären, auf ρ_M wirkenden Transformationen $\mathbb{U}_{A,B}$ und die getrennten Ancillae in den Zuständen $|0\rangle_{\mathcal{K}_A}$, $|0\rangle_{\mathcal{K}_B}$.

Bedingung, dass sich der Anfangszustand $|0\rangle_{\mathcal{K}_A}$ des Systems \mathcal{K}_A unter der unitären Transformation \mathbb{U}_A nach $|\mu\rangle_{\mathcal{K}_A}$ entwickelt. Jedem Zustand $|\mu\rangle_{\mathcal{K}_A}$ entspricht somit eine absolut von anderen Vorgängen unterscheidbare Art der Propagation. Dasselbe lässt sich auch über die Basiszustände $|\nu\rangle_{\mathcal{K}_B}$ der Ancilla \mathcal{K}_B aussagen.

Durch die Krausoperatoren können die Kanäle für die Pfadalternativen auch dargestellt werden als $\Lambda_{A,B}(\rho_M) = \sum_{\mu} \mathbb{T}_{A,B}^{(\mu)} \rho_M \mathbb{T}_{A,B}^{(\mu)\dagger}$. Eine unitäre Entwicklung von ρ_M liegt in beiden Fällen genau dann vor, wenn nur ein Term in den Operatorsummen auftaucht. Falls zwei oder mehr Terme vorhanden sind, werden zu Beginn reine Zustände auf M unter der Wirkung von $\mathbb{U}_{A,B}$ mit den Freiheitsgraden der Hilfssysteme verschränkt. Herausspuren der Ancillae bewirkt dann, dass diese reinen Zustände zu gemischten Markerzuständen werden. Man sieht in diesem Zusammenhang auch, dass ein Superoperator nur dann invertiert werden kann, wenn er unitär ist.

Die Wirkung des Interferometers auf den unkorrelierten Anfangszustand $\rho = \rho_Q \otimes \rho_M$ von Quanton und Marker beschreibt nun der kombinierte Kanal

$$(2.17) \quad \Lambda(\rho) = \text{tr}_{\mathcal{K}_A \mathcal{K}_B} [\mathbb{U}(\rho_Q \otimes |0\rangle_{\mathcal{K}_A} \langle 0| \otimes \rho_M \otimes |0\rangle_{\mathcal{K}_B} \langle 0|) \mathbb{U}^\dagger]$$

mit der pfadkonditionierten unitären Abbildung $\mathbb{U} = |A\rangle_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} \langle A| \otimes \mathbb{U}_A \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{K}_B} + |B\rangle_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} \langle B| \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{K}_A} \otimes \mathbb{U}_B$, Abb. 2.3. Man erhält

$$(2.18) \quad \rho' = \Lambda(\rho) = \frac{1}{2} (|A\rangle_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} \langle A| \otimes \Lambda_A(\rho_M) + |B\rangle_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} \langle B| \otimes \Lambda_B(\rho_M)) + \frac{1}{2} (|A\rangle_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} \langle B| \otimes \mathbb{T}_A^{(0)} \rho_M \mathbb{T}_B^{(0)\dagger} + |B\rangle_{\mathcal{Q}\mathcal{Q}} \langle A| \otimes \mathbb{T}_B^{(0)} \rho_M \mathbb{T}_A^{(0)\dagger}).$$

Davon ausgehend ermittelt man für die reduzierte Dichtematrix des Quantons

$$(2.19) \quad \rho'_Q = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \langle \mathbb{T}_B^{(0)\dagger} \mathbb{T}_A^{(0)} \rangle_{\rho_M} \\ \langle \mathbb{T}_A^{(0)\dagger} \mathbb{T}_B^{(0)} \rangle_{\rho_M} & 1 \end{pmatrix},$$

d.h. die vollständige Symmetrie des Interferometers ist unter dem Quantenkanal Λ erhalten. Es bleibt bei $w_A = w_B = 1/2$, offensichtlich wird also durch die lokalen Quantenkanäle $\Lambda_{A,B}$ wie gewünscht keine Wahrscheinlichkeit zwischen den Pfadalternativen transferiert. Mit $\mathcal{V} = |\langle \mathbb{T}_A^{(0)\dagger} \mathbb{T}_B^{(0)} \rangle_{\rho_M}|$ berechnet man die Sichtbarkeit des Interferenzmusters und durch $\alpha = \arg(\langle \mathbb{T}_A^{(0)\dagger} \mathbb{T}_B^{(0)} \rangle_{\rho_M})$ ist die wechselwirkungsinduzierte Verschiebung der Interferenzfigur gegeben. Der Interferenzkontrast \mathcal{V} hängt folglich vom Überlapp der ersten beiden Krausoperatoren von Λ_A und Λ_B bezüglich des Markeranfangszustands ρ_M ab. Um Missverständnissen vorzubeugen: Da die optimale Stinespringzerlegung bis auf unitäre Transformationen eindeutig ist, sind die Krausoperatoren für einen gegebenen Quantenkanal

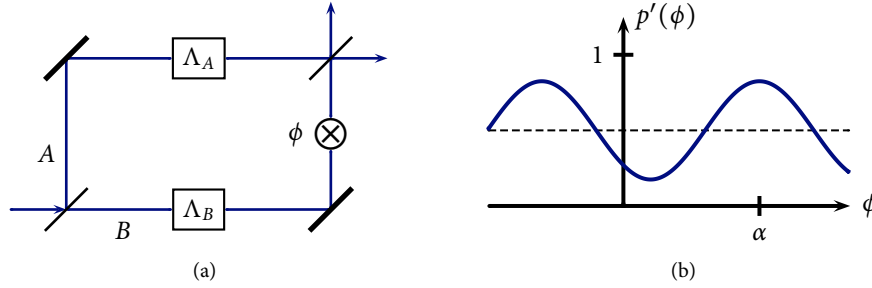


ABBILDUNG 2.4. Um Wechselwirkung zwischen Quanton und Marker ergänztes Mach-Zehnder-Interferometer. Während die Abb. 2.1 auf Seite 6 die triviale Situation der Rekombination ohne jegliche Wechselwirkung mit Freiheitsgraden der Umgebung behandelt, liegt hier nun pfadkonditionierte Wechselwirkung vor: (a) Der interne Zustand des Markersubsystems wird von den Quantenkanälen $\Lambda_{A,B}$ beeinflusst, deren genaue Eigenschaften im weiteren Text diskutiert werden. (b) Durch die Wechselwirkung wird im Allgemeinen der Interferenzkontrast verringert, $\mathcal{V} < 1$, und das Muster verschoben, $\alpha \neq 0$.

wohl definiert. Aber auch die Physik verbietet jegliche Willkür in der Zerlegung, die \mathcal{V} beeinflussen könnte. Abb. 2.4 illustriert die Ergebnisse.

Bisher waren die Superoperatoren der Quantenkanäle spurerhaltend. Es soll von dieser Forderung abgerückt und zugelassen werden, dass die Spur unter Λ abnimmt, $\text{tr } \Lambda(\rho) \leq 1$. Das bedeutet, dass ein Teil der Dynamik ausgeblendet und verworfen wird. Die Motivation der Aufgabe dieser Einschränkung besteht in unserem Wunsch nach der Auswahl und Studie nur eines ganz bestimmten Subensembles, in welchem ein gewünschter, mit Wahrscheinlichkeit $\text{tr } \Lambda(\rho)$ stattfindender Quantenprozess realisiert wird. Es ist sinnvoll, dass die vernachlässigte Dynamik zumindest jenen Teil der Wechselwirkung umfasst, der den (absoluten) Interferenzkontrast nicht beeinflusst: Alle Krausoperatoren $\mathbb{T}_A^{(\mu)}$, $\mathbb{T}_B^{(\nu)}$ mit $\mu, \nu > 0$ fallen dadurch heraus. Daher kann man die vereinfachte Schreibweise $T_{A,B} \equiv \mathbb{T}_{A,B}^{(0)}$ einführen.

$$(2.20) \quad \rho' = \sum_{i,j=A,B} \frac{|i\rangle_{\text{QQ}} \langle j| \otimes T_i \rho_M T_j^\dagger}{\langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}$$

ist der konditionierte Quantenzustand nach dem Prozess und

$$(2.21) \quad p'(\phi) = \frac{1}{2} + \frac{e^{i\phi} \langle T_B^\dagger T_A \rangle_{\rho_M} + e^{-i\phi} \langle T_A^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}{2 \langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}$$

die zugehörige Detektionswahrscheinlichkeit in der Superposition $|\phi\rangle_{\text{Q}}$. Da im Allgemeinen durch die Krausoperatoren T_A und T_B pfadkonditionierte Wechselwirkungen zwischen Quanton und Marker mit verschiedenen Endzuständen

$$(2.22) \quad \rho_M^A = \frac{T_A \rho_M T_A^\dagger}{\langle T_A^\dagger T_A \rangle}, \quad \rho_M^B = \frac{T_B \rho_M T_B^\dagger}{\langle T_B^\dagger T_B \rangle}$$

beschrieben werden, ist das Interferometer jetzt asymmetrisch und wir finden für die Wegwahrscheinlichkeiten w_A und w_B

$$(2.23) \quad w_A = w = \frac{\langle T_A^\dagger T_A \rangle_{\rho_M}}{\langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}, \quad w_B = 1 - w = \frac{\langle T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}{\langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}.$$

Auch die Sichtbarkeit der Interferenzfigur ist hinsichtlich der Ensemblewahrscheinlichkeit zu reskalieren,

$$(2.24) \quad \mathcal{V} = 2 \frac{|\langle T_A^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}|}{\langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}.$$

Hier sehen wir dem Zähler sehr gut an, dass man nur dann ein Interferenzmuster messen kann, wenn der Überlapp zwischen den Markerendzuständen der beiden Pfade nicht verschwindet oder – falls es sich um reine Endzustände handelt – diese nicht absolut unterscheidbar sind.

Interferenzmuster als Verschränkungszeuge

In diesem Teil beschäftigen wir uns mit der Detektion von Verschränkung in einem Quantensystem, das aus zwei identischen Teilchen 1 und 2 besteht. In der Einleitung dieser Arbeit wurde bereits über mögliche Lösungsmethoden für eine solche Aufgabe berichtet. Mit Verweis auf dieses Kapitel geschah dies jedoch ohne Erörterung experimenteller Aspekte.

Nach der Präparation eines verschränkten Zustands möchte man in der Regel wissen, inwieweit man erfolgreich darin war. Um Verschränkung wirklich zu quantifizieren, könnte im Prinzip auf einen vollständigen Satz von Observablen zurückgegriffen werden, dessen Messung absolutes Wissen über den Zustand der beiden Teilchen schafft. Eine solche Rekonstruktion des statistischen Operators wird auch als Zustandstomographie (Vogel u. Risken 1989; James u. a. 2001) bezeichnet. In der Praxis ist dies jedoch zumindest aufwändig bis oftmals nicht durchführbar: Jede Messung erfordert erneute Präparation, genau wie jede Minderung von Unwägbarkeiten und statistischen Fehlern weiterer Wiederholungen bedarf. Nach Erlangen von vollständiger Kenntnis des statistischen Operators¹ kann schließlich ein Verschränkungsmaß² zur Charakterisierung herangezogen werden und die Frage nach erfolgter Verschränkung wäre beantwortet. Die Tomographie des Quantenzustands ist in der Regel unumgänglich, wenn man physikalische Prozesse in einem quanteninformativen Ablauf verstehen möchte, aber hier geht es um das Aufspüren von Quantenkorrelationen, von denen man erwarten würde, dass sie direkt beobachtbare Konsequenzen haben. Verschränkung ist jedoch in strengem, quantenmechanischem Sinn keine Observable, es gibt nämlich keinen hermiteschen Operator, dessen Erwartungswert ein gültiges monotonen Verschränkungsmaß definieren könnte. Sehr wohl gibt es aber Observablen, mit deren Hilfe Verschränkung nachgewiesen werden kann: *Verschränkungszeugen*, denen zur theoretischen Einführung das Unterkapitel 1 gewidmet wird. Experimentell lassen sie sich in optimierter Weise durch Zerlegung in mehrere lokale Messungen realisieren (Gühne u. a. 2002; Bourennane u. a. 2004), jedoch sicherlich in wenige im Vergleich zu voller Tomographie.

Zeugen werden hier zwar Teil der Lösung sein, im Hinblick auf deren Realisation werden wir jedoch einen neuen Weg einschlagen. Wir untersuchen, wieviel Information über die Verschränkung beider Partikel *mittels Interferenz* ermittelt werden kann. Die Idee ist, ein drittes Teilchen – mit weiteren internen Freiheitsgraden – einzuführen, das als eine Art quantenmechanischer Agent oder besser als eine Sonde interferometrisch Informationen über die Subsysteme 1 und 2 sammelt. Das im Folgenden erörterte Protokoll sieht weiterhin die Möglichkeit vor, nach der Wechselwirkung einen bestimmten Sondenzustand projektiv zu selektieren. Es wird also nur am Sondenteilchen gemessen, wir verzichten sowohl auf direkte Messung an den eingangs verschränkten Partikeln, noch ist zwischen ihnen eine speziell konstruierte, *direkte* Wechselwirkung erforderlich, Abb. 3.1.

Zunächst ist es völlig unklar, ob die kohärente Wechselwirkung gestattet, dass anhand des Interferenzbildes Quantenkorrelationen zwischen 1 und 2 von solchen klassischer Art

¹Vollständiges, exaktes Wissen ist genau genommen nicht möglich, Messfehler können nicht vermieden werden und somit wird die Rekonstruktion stets vom exakten statistischen Operator abweichen.

²Verschränkungsmaße und darüber hinaus Allgemeines zur Theorie der Verschränkung werden in Anhang A ab Seite 61 diskutiert.

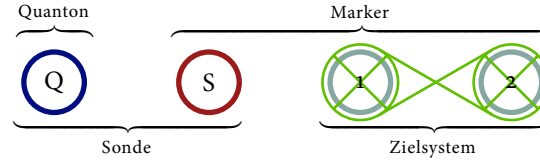


ABBILDUNG 3.1. Aufteilung in Subsysteme. Nur auf Pfad- und internen Freiheitsgraden des Sondenteilchens, d.h. auf den Subsystemen Q und S, wird gemessen. Die Verschränkung zwischen 1 und 2 ist hier durch die Verschnürung illustriert.

unterschieden werden können. Sind derartige Rückschlüsse tatsächlich möglich und falls ja, kann die Methode auch auf alle verschränkten Zustände angewandt werden?

Vielleicht sollte vor der Diskussion dieser Fragen genau herausgestellt werden, was mit bekannten Mitteln über den Einfluss von Verschränkung auf ein Quanteninterferometer ausgesagt werden kann. Als wir uns in Abschnitt 1 des vorigen Kapitels mit dem Quantenradierer befassten, begegnete uns der Extremfall einer Komplementarität (Jaeger u. a. 1993, 1995; Jakob u. Bergou 2003) zwischen lokalen Ein-Teilchen-Größen und einer nicht-lokalen Eigenschaft des zweiteiligen Systems „Quanton plus Marker“: Die Pfade des Quantons waren durch diese beiden maximal verschränkten Partner absolut unterscheidbar. Infolgedessen betrug die Sichtbarkeit $\mathcal{V} = 0$, d.h. mit anderen Worten war die Komplementarität zwischen der Stärke der EPR-Korrelationen und der Sichtbarkeit der Ein-Teilchen-Interferenz zugunsten der Verschränkung gesättigt. In einem breiteren Rahmen (Jaeger u. a. 1993), in dem das Markersystem aus dem Pfadqubit eines weiteren, mit Q verschränkten Teilchens besteht, stellt sich dies wie folgt dar:

Das Teilchen Q, unser Quanton, befindet sich sowohl in Pfad A als auch in Pfad B eines Youngschen Interferometers. Für das zweite Teilchen M, den bisherigen Marker, gilt das Entsprechende. Da nun beide Subsysteme zweidimensionale Pfadinformationen beschreiben, ist das Problem symmetrisch: M markiert den Weg von Q, während Q Informationen über den Pfad von M vorhält. Trotzdem soll in diesem kurzen Exkurs weiterhin einheitlich von Quanton und Marker die Rede sein.

Ein allgemeiner reiner Zustand des Quantensystems lautet

$$(3.1) \quad |\psi'\rangle = \alpha|A\rangle_Q|A\rangle_M + \beta|A\rangle_Q|B\rangle_M + \gamma|B\rangle_Q|A\rangle_M + \delta|B\rangle_Q|B\rangle_M.$$

Für $\alpha = \delta = 1/\sqrt{2}$ und $\beta = \gamma = 0$ erhält man den maximal verschränkten Zustand aus der Diskussion des Quantenradierers, Abschnitt 1 des Kapitels 2. Für sowohl Quanton als auch Marker können nun Ein-Teilchen-Interferenzmuster $p'_{Q,M}(\phi) = {}_{Q,M}\langle\phi|\rho'_{Q,M}|\phi\rangle_{Q,M}$ mit Kontrasten \mathcal{V}_Q und \mathcal{V}_M definiert werden. Darüberhinaus behandeln Jaeger u. a. (1995) eine Zwei-Teilchen-Interferenz mit Sichtbarkeit \mathcal{V}_{QM} . In diese gehen allerdings im Gegensatz zu den Ein-Teilchen-Größen bedingte Detektionswahrscheinlichkeiten ein, die Korrelationen zwischen den Subsystemen Q und M aufzeigen. Es wurde gezeigt, dass $\mathcal{V}_{Q,M}$ und \mathcal{V}_{QM} sich komplementär zueinander verhalten, $\mathcal{V}_{QM} + \mathcal{V}_{Q,M} \leq 1$. Ferner besteht für reine Zustände $|\psi'\rangle$ eine direkte Verbindung der nichtlokalen Sichtbarkeit \mathcal{V}_{QM} zur Stärke der Verschränkung zwischen Quanton und Marker (Żukowski u. Kaszlikowski 1997; Jakob u. Bergou 2003). Daraus folgt, dass mit steigender Verschränkung von $|\psi'\rangle$ die Ein-Teilchen-Interferenzfiguren immer schwächer werden, bis sie wie in unserem Beispiel zum Quantenradierer ganz verschwinden.

Die wesentliche Schwäche dieser Resultate ist ihre Restriktion auf reine Quantenzustände. Die Beweise, dass eine bestimmte Zwei-Teilchen-Sichtbarkeit Verschränkung der Subsysteme garantiert, basieren auf der Annahme, dass nur ein limitierter Beitrag weißen Rauschens in den betrachteten Zustand $|\psi'\rangle$ gemischt wird (Żukowski u. Kaszlikowski 1997). Ferner zielen die soeben vorgestellten Ergebnisse auf die Detektion zwischen Pfadqubit und

Marker *nach* der Wechselwirkung. Wir visieren demgegenüber aber das Aufspüren von *vor* der Wechselwirkung präparierter Verschränkung allein in den Markerfreiheitsgraden der identischen Teilchen 1 und 2 an. Zum gegenwärtigen Zeitpunkt ist nicht klar, ob und wann eine Verbindung zwischen diesen beiden Problemstellungen besteht.

Die für letztere zur Lösung in Frage kommenden Verschränkungszeugen funktionieren im Übrigen für reine und gemischte Zustände gleichermaßen, wie wir nun sehen werden.

1. Verschränkungszeugen

Entanglement Witnesses oder zu deutsch *Verschränkungszeugen* können sich in der experimentellen Charakterisierung von Verschränkung als ausgesprochen hilfreich erweisen. Wenn die Dichtematrix des Quantensystems nicht als bekannt vorausgesetzt werden kann, lässt sich offensichtlich kein Kriterium für Verschränkung anwenden, das auf deren Kenntnis basiert. Dies betrifft im Wesentlichen alle Verschränkungsmaße. Es existiert jedoch ein notwendiges und hinreichendes Kriterium mittels direkt messbarer Observablen, den Verschränkungszeugen: Von deren Erwartungswert kann man *ad hoc* auf das Vorliegen von Verschränkung eines zuvor präparierten Zustands schließen. Dies ist insbesondere in solchen Situationen nützlich, in denen man auf das Sammeln von Informationen bis hin zu absolutem, tomographischem Wissen über den Quantenzustand verzichten möchte oder muss. Die Existenz der Verschränkungszeugen ist ein Lemma der geometrischen Form des Satzes von Hahn-Banach, welches die Trennung einer konvexen Menge und eines Punktes behandelt:

Sei S eine konvexe, kompakte Menge und sei $\rho \notin S$. Dann existiert eine abgeschlossene Hyperebene, die ρ und S strikt separiert.

Im vorliegenden Kontext ist die Familie der separablen Zustände S die betrachtete konvexe Menge im Vektorraum der Dichteoperatoren, auf welchem die Spur tr ein Skalarprodukt definiert und somit eine geometrische Interpretation ermöglicht. Falls es sich bei ρ um einen verschränkten Zustand handelt, liegt er naturgemäß außerhalb von S . Die trennende Hyperebene oder ihre Identifikation mit einem hermiteschen Operator W ist das, was wir Verschränkungszeuge nennen. Es ist anschaulich klar, dass es zu einem gegebenen verschränkten Zustand ρ mehr als einen Zeugen gibt, der diesen und S trennt.

Modulo einiger Details ist hiermit gezeigt, dass ρ dann und nur dann verschränkt ist, wenn es einen hermiteschen Operator W mit $\langle W \rangle_\rho < 0$ und $\langle W \rangle_\sigma \geq 0$ für alle separablen Zustände $\sigma \in S$ gibt. Man sagt, dass der Zeuge W die Verschränkung von ρ *detektiert*, Abb. 3.2. Umgekehrt gilt, dass ein Zustand σ dann und nur dann separabel ist, wenn $\langle W \rangle_\sigma \geq 0$ für jede Observable W erfüllt ist, die $\text{tr}[W|\psi\rangle_1\langle\psi| \otimes |\phi\rangle_2\langle\phi|] \geq 0$ für alle reinen Produktzustände $|\psi\rangle_1 \otimes |\phi\rangle_2 \equiv |\psi\rangle_1|\phi\rangle_2$ genügt. Zunächst klingt dies nach einem abstrakten Theorem ohne praktische Relevanz. Es entpuppt sich jedoch als ein mächtiges Werkzeug: Wann immer der Erwartungswert eines Zeugen W einen Wert kleiner als Null annimmt, kann man eindeutig folgern, dass der Zustand in einer bestimmten Weise verschränkt sein muss, d.h., dass der Zustand im prinzipbedingt bekannten Detektionsbereich von W liegt. Ist der Erwartungswert jedoch nichtnegativ, vermag der Verschränkungszeuge nicht zu entscheiden, ob ρ separabel oder verschränkt ist. Ein Zeuge beantwortet daher die Frage nach dem Vorliegen von Verschränkung nicht mit „ja“ oder „nein“, sondern mit „ja“ oder „eventuell“.

Ein Zeuge W ist stets eine nichtlokale Observable und hat immer einen verschränkten Eigenzustand. Das liegt daran, dass W mindestens einen negativen Eigenwert haben muss und da jeder Zeuge nichtnegativ für alle Produktzustände zu sein hat, kann es sich beim korrespondierenden Eigenvektor nicht um einen solchen separablen Zustand handeln. Falls W also nicht in der Lage ist, einen gegebenen verschränkten Zustand zu detektieren, bedeutet dies, dass der Überlapp des Zustands mit dem verschränkten Eigenzustand W 's nicht groß genug für ein Gelingen des Nachweises ist.

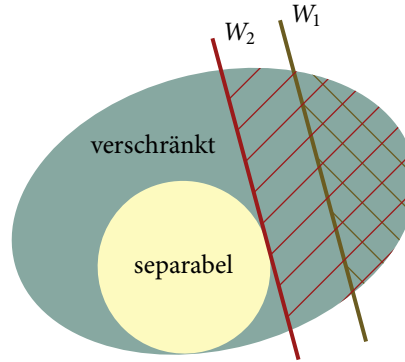


ABBILDUNG 3.2. Zu sehen ist ein Schnitt durch den typischerweise hochdimensionalen Operatorvektorraum, dessen Element ρ ist. Der äußere konvexe Rand umschließt alle gültigen Quantenzustände. Darin trifft man entweder auf verschränkte \blacksquare oder auf separable \blacksquare Zustände, wobei letztere die konvexe Menge \mathcal{S} bilden. Der erste von zwei Beispielzeugen hat seinen charakteristischen Vorzeichenwechsel $\langle W_1 \rangle = 0$ auf der rechten geraden Linie, es handelt sich dabei um die Skizze der assoziierten Hyperebene. Daher korrespondiert die rechts angrenzende gestreifte Fläche mit denjenigen verschränkten Zuständen, die W_1 detektiert. W_2 findet diejenigen Zustände, die von W_1 aufgespürt werden, darüber hinaus jedoch auch weitere. Man sagt, W_2 ist feiner als W_1 . Da W_2 tangential zu \mathcal{S} liegt bzw. dessen Rand berührt und die Hyperebenen \mathcal{S} nicht durchdringen dürfen, gibt es keinen Zeugen, der feiner als W_2 ist. Man nennt daher W_2 optimal.

2. Ansatz zur Realisation eines interferometrischen Verschränkungsdetektors

Wie kann nun ein Zeuge in der vorliegenden Situation implementiert werden? Es zeigt sich, dass der Formalismus, in dem die Dynamik eines Quanteninterferometers im vorherigen Kapitel behandelt wurde, exzellent zur Beantwortung dieser Frage geeignet ist. Erinnern wir uns aber zunächst daran, dass unser Markersystem M aus insgesamt drei Teilen bestehen soll: Ein Sondenteilchen S interferiert, nachdem es auf zwei sich gegenseitig ausschließenden Pfadalternativen mit je einem von zwei weiteren identischen, möglicherweise verschränkten Teilchen 1 und 2 interagiert hat. Dabei beschreibt der Quantenzustand die interferometrischen Freiheitsgrade, d.h. den Teilchen- oder Wellencharakter der Sonde, während dem Markersubsystem deren interne Freiheitsgrade zugeordnet werden. Aufgrund der selbst auferlegten Vorgabe, keine direkten Messungen auf den Zielsubsystemen 1 und 2 durchzuführen, kommen in einem (erdachten) Experiment als Messgrößen nur Erwartungswerte von solchen Observablen in Frage, die ausschließlich Pfad- und interne Freiheitsgrade der Sonde abfragen, d.h. auf Q und S wirken. Wir beschränken uns im Folgenden auf den einfachen Fall unkorrelierter, vertauschbarer Operationen auf den genannten Subsystemen und diskutieren Observablen der Gestalt

$$(3.2) \quad \hat{O}_{QS} = \hat{O}_Q \otimes \hat{O}_S,$$

für deren Erwartungswert man mit (2.20) auf direktem Weg

$$(3.3) \quad \langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}} = \sum_{i,j=A,B} \frac{Q \langle i | \hat{O}_Q | j \rangle_Q \langle T_j^\dagger \hat{O}_S T_i \rangle_{\rho_M}}{\langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}$$

findet. Entscheidend ist die Voraussetzung, dass Sonde S und Probe 12 unabhängig voneinander präpariert werden, denn dann ist der Anfangszustand unkorreliert und faktorisiert,

$\rho = \rho_Q \otimes \rho_S \otimes \rho_{12}$, sodass

$$(3.4) \quad \langle T_j^\dagger \hat{O}_S T_i \rangle_{\rho_M} = \text{tr}_{S_{12}} [(\rho_S \otimes \rho_{12}) T_j^\dagger \hat{O}_S T_i] = \text{tr}_{12} [\rho_{12} \text{tr}_S [\rho_S T_j^\dagger \hat{O}_S T_i]].$$

Die Zerlegung der Spuroperation erweist sich als sinnvoll, denn sie kann nun verwendet werden, um (3.3) in der Form

$$(3.5) \quad \langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}} = \text{tr}_{12} [\rho_{12} \sum_{i,j} \langle i | \hat{O}_Q | j \rangle_Q \text{tr}_S [\rho_S T_j^\dagger \hat{O}_S T_i]] / \langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}$$

zu schreiben. Die Gleichung (3.5) markiert den zentralen Punkt des Vorschlags, denn die rechte Seite enthält neben der stets nichtnegativen Ensemblewahrscheinlichkeit den Erwartungswert $\langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}$ der effektiven Observablen

$$(3.6) \quad \hat{O}_{12} = \sum_{i,j=A,B} \langle i | \hat{O}_Q | j \rangle_Q \text{tr}_S [\rho_S T_j^\dagger \hat{O}_S T_i]$$

bezüglich des Zustands der Teilchen 1 und 2, d.h. des Zielsystems. Der Operator \hat{O}_{12} hängt von verschiedenen Größen ab, nämlich

- (i) den Pfadalternativen A, B des Interferometers,
- (ii) der interferometrischen Observablen \hat{O}_Q ,
- (iii) den pfadkonditionierten Übergangsoperatoren $T_{A,B}$,
- (iv) dem Anfangszustand ρ_S der Sonde und
- (v) der Observablen \hat{O}_S , die alleinig auf den internen Freiheitsgraden des Sonden-
teilchens agiert.

$\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}} \propto \langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}$ ist eine Verknüpfung zwischen ausgewählten internen wie auch interferometrischen Messdaten und Erwartungswerten von Observablen, die direkt auf die verschränkten Teilchen wirken. Man sieht hieran deutlich, dass durch die Interferenz eine effektive Wechselwirkung zwischen den Teilchen 1 und 2 induziert wird und die Identität (3.5) das entscheidende Ergebnis auf dem Weg zur Realisierung von Verschränkungszeugen mittels Ein-Teilchen-Interferenz ist.

In Wahrheit wurde das Problem aber nur verschoben. Die Beziehung (3.5) ergibt sich ganz zwanglos und man erwartet zunächst nicht, dass damit das Problem gelöst werden kann. Denn statt nicht zu wissen, ob kohärente Wechselwirkung eines Sonden-
teilchens mit der Probe Verschränkung detektiert, sehen wir uns ab diesem Punkt mit der Frage konfrontiert, ob in physikalisch relevanten Fällen die durch \hat{O}_{12} induzierte Wechselwirkung sensitiv für Verschränkung ist. Die wahre Aufgabe besteht demnach darin, nicht pathologisch theoretische, sondern dem Experiment nahe Konfigurationen (i)–(v) zu finden, in denen $\langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}$ einen für Verschränkung charakteristischen Vorzeichenwechsel zeigt, d.h. in denen die effektive Observable \hat{O}_{12} ein Verschränkungszeuge ist. Erst dann ist bewiesen, dass (3.5) nützlich und wichtig ist. Im Verlauf dieser Arbeit wird häufig auf diese fünf Punkte Bezug genommen, gewissermaßen sind sie der Leitfaden.

2.1. Hilft Sortierung von Messergebnissen bei der Detektion? Diese Frage muss man sich spätestens dann stellen, wenn man darüber philosophiert, wie konkret die Messung des Erwartungswertes $\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}}$ implementiert werden kann. Sicherlich wird die Messung auf dem Pfadalternativenqubit Q projektiver Natur sein, in dem Sinne, dass der Experimentator sich für eine bestimmte Phase ϕ zwischen den Pfaden A und B entscheidet, für die er dann seinen Detektorklick erwartet. Verzichtet er auf Messungen auf dem Marker, könnte er so mit entsprechender Kalibrierung die relative Intensität $p'(\phi)$ erhalten. Demgegenüber drängt sich nun die Frage auf, wie man frei von jedweder Kenntnis des experimentellen Szenarios und der Möglichkeiten des Experimentators dem Problem der In-situ-Messung von \hat{O}_S begegnen kann.

In Abschnitt 2 des Kapitels 2 wurden die von-Neumannschen Messungen und die sich in natürlicher Weise ergebende Sortierung von Messergebnissen in Subensembles diskutiert. Mit jeder Messung der Observablen $\hat{O}_S = \sum_{k \in \sigma(\hat{O}_S)} k \hat{P}_S^{(k)}$ wird bei Erhalt des Eigenwerts $k \in \sigma(\hat{O}_S)$ die Realisierung

$$(3.7) \quad \rho^{(k)} = \frac{1}{p^{(k)}} \hat{P}_S^{(k)} \rho' \hat{P}_S^{(k)}$$

selektiert. Die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert k zu finden, beträgt $p^{(k)} = \langle \hat{P}_S^{(k)} \rangle_{\rho'_S}$. Wir hatten bereits gesehen, dass die phasenabhängige Detektionsintensität der Interferenzfigur dem Erwartungswert $p^{(k)}(\phi) = \langle |\phi \rangle_{Q_Q} \langle \phi | \rangle_{\rho_Q^{(k)}}$ folgt. Es ist klar, dass aus ihr für das k -te Subensemble die Erwartungswerte

$$(3.8) \quad \langle \hat{O}_Q \rangle_{\rho_Q^{(k)}} = \frac{1}{p^{(k)}} \sum_{i,j=A,B} \frac{{}_Q \langle i | \hat{O}_Q | j \rangle_Q \langle T_j^\dagger \hat{P}_S^{(k)} T_i \rangle_{\rho_M}}{\langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}$$

verschiedener Quantenobservablen \hat{O}_Q bestimmt werden können. Zwischen diesen Erwartungswerten und dem fraglichen Erwartungswert $\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}}$ besteht schließlich die Beziehung

$$(3.9a) \quad \langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}} = \sum_k k p^{(k)} \langle \hat{O}_Q \rangle_{\rho_Q^{(k)}},$$

was man sofort sieht, wenn man die Spektraldarstellung der Sondenobservablen \hat{O}_S in die Gleichung (3.3) einsetzt und mit der Identität (3.8) vergleicht. Definiert man dem bisherigen Konzept treu für jedes Subensemble k effektiv auf dem Zielsystem 12 operierende Observablen $\hat{O}_{12}^{(k)} = \sum_{i,j} {}_Q \langle i | \hat{O}_Q | j \rangle_Q \text{tr}_S[\rho_S T_j^\dagger \hat{P}_S^{(k)} T_i]$, kann man dies umschreiben zu

$$(3.9b) \quad = \frac{\sum_k k \langle \hat{O}_{12}^{(k)} \rangle_{\rho_{12}}}{\langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}.$$

Wendet man die Spektraldarstellung rückwärts an, ist obiges Resultat wie erwartet gleich

$$(3.9c) \quad = \frac{\langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}}{\langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}.$$

Was bedeutet nun Gl. (3.9a)? Die in der Summe auftretenden Faktoren $\langle \hat{P}_S^{(k)} \rangle_{\rho'_S} = p^{(k)}$ geben die Wahrscheinlichkeiten an, bei einer Messung von \hat{O}_S den Eigenwert k zu finden. Die Gleichung zeigt, dass bei Kenntnis dieser Wahrscheinlichkeiten aus den Interferenzfiguren $p^{(k)}(\phi)$ der Erwartungswert $\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}}$ konstruiert werden kann. Demzufolge wird die Fragestellung des Unterabschnitts durch Beziehung (3.9a) bejaht: Die Summe der sortierten Messergebnisse enthält die gewünschte Information.

Prinzipiell kann auch eine einzige effektive Observable $\hat{O}_{12}^{(k)}$ für sich allein genommen bereits hinsichtlich der Detektion von Verschränkung interessant genug sein, sodass sich der Experimentator mit der Untersuchung des zugehörigen Subensembles k , d.h. mit einer einzigen projektiven Messung auf dem Marker, begnügen kann.

2.2. Projektive Zustandsreduktion im Detail. Wir beschäftigen uns nun mit dem besonders instruktiven Fall, in dem \hat{O}_S bereits ein Projektor ist, $\hat{O}_S^2 = \hat{O}_S \equiv 1 \hat{P}_S^{(1)} \equiv \hat{P}_S$. Demzufolge kann dann bereits zu Beginn die gesamte Messung als eine Konditionierung auf die

Realisierung des Subensembles mit $\rho_S^{(1)} \equiv \rho_S'' = \hat{P}_S$ ausgelegt werden³:

$$(3.10a) \quad \rho' \mapsto \rho'' = \sum_{i,j=A,B} \frac{|i\rangle_{\text{QQ}}\langle j| \otimes \hat{P}_S T_i \rho_M T_j^\dagger \hat{P}_S}{\langle T_A^\dagger \hat{P}_S T_A + T_B^\dagger \hat{P}_S T_B \rangle_{\rho_M}}$$

$$(3.10b) \quad \equiv \frac{1}{\langle \dots \rangle_{\rho_M}} \begin{pmatrix} \hat{P}_S T_A \rho_M T_A^\dagger \hat{P}_S & \hat{P}_S T_A \rho_M T_B^\dagger \hat{P}_S \\ \hat{P}_S T_B \rho_M T_A^\dagger \hat{P}_S & \hat{P}_S T_B \rho_M T_B^\dagger \hat{P}_S \end{pmatrix}.$$

Falls \hat{O}_S kein Projektor sein sollte, liefert dieser Abschnitt das Rezept, mit dem jedes einzelne Subensemble k der Sortierung behandelt werden kann. Doch richten wir unseren Blick auf die Zustandsreduktion (3.10). Findet das Ereignis statt, d.h. ist der Überlapp $\langle \hat{P}_S \rangle_{\rho_S'} > 0$ und wird der Eigenwert 1 (beispielsweise durch einen Detektorklick) gefunden, dann befindet sich das Quantensystem direkt nach der Messung im Zustand ρ'' oder – mit anderen Worten – dann charakterisiert der statistische Operator in (3.10) das assoziierte Subensemble.

Die Größe von Interesse ist nun die Detektionsintensität⁴

$$(3.11) \quad P''(\phi) = {}_Q\langle \phi | \rho_Q'' | \phi \rangle_Q = \frac{1}{2} + \frac{e^{i\phi} \langle T_B^\dagger \hat{P}_S T_A \rangle_{\rho_M} + e^{-i\phi} \langle T_A^\dagger \hat{P}_S T_B \rangle_{\rho_M}}{2 \langle T_A^\dagger \hat{P}_S T_A + T_B^\dagger \hat{P}_S T_B \rangle_{\rho_M}} = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{V} \cos(\phi - \alpha))$$

des Subensemble-Interferenzmusters. Wir stellen uns die Frage, welche Quantenobservablen \hat{O}_Q Erwartungswerte besitzen, die daraus gewonnen werden können. Zusammen mit der $\mathbb{1}$, die manchmal als σ^0 geschrieben wird, bilden die Generatoren der $SU(2)$ -Gruppe – die Paulimatrizen σ^1 , σ^2 und σ^3 – eine bezüglich des Hilbert-Schmidt-Skalarprodukts orthogonale Basis für den reellen Hilbertraum aller selbstadjungierten 2×2 -Matrizen. Also kann jede Observable \hat{O}_Q in eine reelle Linearkombination dieser vier grundlegenden Observablen zerlegt werden. Mit Hilfe der von der Phase ϕ abhängigen kohärenten Superposition $|\phi\rangle_{\text{QQ}}\langle\phi| = \frac{1}{2} \sigma_Q^0 + \frac{1}{2} \cos \phi \sigma_Q^1 + \frac{1}{2} \sin \phi \sigma_Q^2$, deren Erwartungswert ja das Interferenzmuster beschreibt, erhalten wir deren zumindest drei,

$$(3.12a) \quad \sigma_Q^0 = |\phi\rangle_{\text{QQ}}\langle\phi| + |\phi + \pi\rangle_{\text{QQ}}\langle\phi + \pi|,$$

$$(3.12b) \quad \sigma_Q^1 = |0\rangle_{\text{QQ}}\langle 0| - |\pi\rangle_{\text{QQ}}\langle\pi|, \quad \sigma_Q^2 = |\frac{\pi}{2}\rangle_{\text{QQ}}\langle\frac{\pi}{2}| - |-\frac{\pi}{2}\rangle_{\text{QQ}}\langle-\frac{\pi}{2}|.$$

Wir erreichen so also nicht alle Vektoren in der Blochsphäre und sind genauer gesagt auf ihre Äquatorebene beschränkt: $\hat{O}_Q = u \sigma_Q^0 + v \sigma_Q^1 + w \sigma_Q^2$ mit $u, v, w \in \mathbb{R}$. Für die Implementierung der Observable σ_Q^3 müsste man a posteriori die Amplituden von A und B unabhängig voneinander ausblenden. Es ist nicht klar, ob dies überhaupt möglich ist. Daher wird diese Option nicht weiter diskutiert.

Durch die Messung von $\hat{O}_Q = \sigma_Q^0$ werden die inkohärenten Elemente des Quantons mit gleichem Gewicht abgefragt. Dadurch erhält man aber nur die triviale Information $w_A + w_B = 1$. Interessanter sind die Erwartungswerte von σ_Q^1 und σ_Q^2 , da sie durch die Kohärenzen des Quantons bestimmt werden. Die Resultate sind somit eng an die Güte der Interferenz und letztlich die Sichtbarkeit \mathcal{V} geknüpft.

Der Projektor \hat{P}_S besitzt nur die Eigenwerte 0 und 1. In der Summe der Identität (3.9a) bleibt dadurch nur ein einziger Term übrig. Wenn wir uns für den Erwartungswert von \hat{O}_Q bezüglich des auf \hat{P}_S projizierten Quantensystems interessieren, können wir Gl. (3.9a) sofort danach auflösen und erhalten

$$(3.13) \quad \langle \hat{O}_Q \rangle_{\rho_Q''} = \frac{\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho_{QS}'}}{\langle \hat{P}_S \rangle_{\rho_S'}} = \frac{\langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}}{\langle T_A^\dagger \hat{P}_S T_A + T_B^\dagger \hat{P}_S T_B \rangle_{\rho_M}}.$$

³Die Matrixdarstellung erfolgt wieder in der Standardbasis bezüglich des Quantons Q . Jeder Eintrag enthält dabei einen auf dem Marker M agierenden Operator.

⁴Vergleiche auch Gl. 2.21 auf Seite 13.

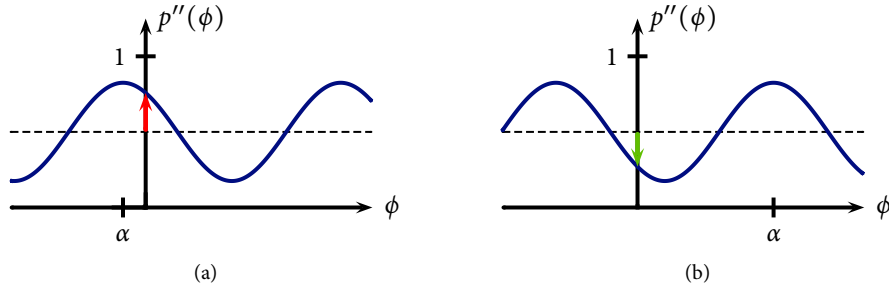


ABBILDUNG 3.3. Interferenzmuster $p''(\phi)$. (b) Für eine geeignete Konfiguration der Parameter (i)–(v) von Interferometer und Sonde bezeugt destruktive Interferenz am Ursprung $\phi = 0$ Verschränkung zwischen den beiden Probenteilchen 1 und 2. (a) Konstruktive Interferenz deutet hingegen darauf hin, dass entweder keine Verschränkung vorliegt oder der Überlapp des verschränkten Zustands mit dem verschränkten Eigenvektor von \hat{O}_{12} zu klein für erfolgreiche Detektion ist.

Das bedeutet, dass sich aus dem Interferenzbild der gewünschte Erwartungswert des designierten Verschränkungszeugen \hat{O}_{12} ablesen lässt. Die im Nenner auftauchende Ensemblewahrscheinlichkeit

$$(3.14) \quad \langle T_A^\dagger \hat{P}_S T_A + T_B^\dagger \hat{P}_S T_B \rangle_{\rho_M} = \langle \hat{P}_S \rangle_{\rho_S'} \langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}$$

kann sich allerdings als störend erweisen: Verschwindet sie, lässt sich das Subensemble nicht selektieren, da der zugehörige Prozess nicht stattfindet. Ist dies der Fall, so muss $\langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}$ auf eine andere, im Kontext des jeweiligen Experiments zu klärende Art bestimmt werden. Ferner liefert im Regelfall das Vorzeichen des Erwartungswerts des Verschränkungszeugen das Kriterium für Verschränkung und nicht etwa das Über- oder Unterschreiten eines von Null verschiedenen Schwellenwerts. Trifft jedoch letzteres zu oder ist man an einer quantitativen Bestimmung von $\langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}$ interessiert, so verhindert der Nenner in (3.13) den Erfolg mit abzusehender Sicherheit. Uns werden in späteren Kapiteln Probleme dieser Art begegnen.

2.3. Ablesen der Verschränkung direkt aus dem Interferenzmuster. Demgegenüber soll die Nützlichkeit von (3.13) mit einem Beispiel unterstrichen werden, welches zu einem greifbaren Kriterium für Verschränkung führt, Abb. 3.3. Sei $\hat{O}_Q = \sigma_Q^1$. Die Observable wählt daraufhin also explizit die für die Interferenz verantwortlichen Kohärenzen des Quantons aus. Dann ist

$$(3.15a) \quad \langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}} \propto \langle \hat{O}_Q \rangle_{\rho_Q''} = \frac{\langle T_B^\dagger \hat{P}_S T_A + T_A^\dagger \hat{P}_S T_B \rangle_{\rho_M}}{\langle T_A^\dagger \hat{P}_S T_A + T_B^\dagger \hat{P}_S T_B \rangle_{\rho_M}} = p''(0) - p''(\pi) = 2p''(0) - 1$$

$$(3.15b) \quad = \mathcal{V} \cos \alpha,$$

der Interferenzbeitrag bei verschwindender Phasenverschiebung, d.h. $\phi = 0$. Wir wollen nun annehmen, dass man die Parameter (i)–(v) geeignet wählen kann und die mit $\hat{O}_Q \otimes \hat{P}_S$ assoziierte Observable \hat{O}_{12} tatsächlich ein Verschränkungszeuge ist. Dann wird es möglich, einen verschränkten Zustand ρ_{12} direkt durch einen Blick auf das Interferenzbild bzw. durch Fit von $p''(\phi)$ an experimentelle Daten zu detektieren: Falls der Interferenzbeitrag positiv ist, also im Falle $\cos \alpha > 0$ beziehungsweise $-\pi/2 < \alpha = \arg(\langle T_A^\dagger \hat{P}_S T_B \rangle_{\rho_M}) < \pi/2$, liegt bei $\phi = 0$ konstruktive Interferenz vor und wir haben keine Information darüber, ob ρ_{12} separabel war oder nicht, Abb. 3.3a. Falls jedoch $\cos \alpha < 0$ gefunden wird, handelt es sich um destruktive Interferenz und die beiden Teilchen waren eindeutig verschränkt, Abb. 3.3b.

SCHLUSSFOLGERUNGEN

Zusammenfassend hat dieses Kapitel vielversprechende Möglichkeiten aufgezeigt, Verschränkungszeugen mittels Ein-Teilchen-Interferenz zum Nachweis von EPR-Korrelationen zu implementieren. Die Zeugen sind ein mächtiges Instrument, sofern man eine Vorstellung davon hat, welche verschränkten Quantenzustände nach der Präparation vorliegen können. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn man erfahren will, ob Rauschen die Herstellung eines bestimmten verschränkten Zustands unterbindet. Je mehr Kenntnis über diesen vorliegt, umso weniger muss man über das Rauschen für eine eindeutige Klassifizierung des Zustands wissen (Gühne u. a. 2002). In anderen Fällen kann es dagegen nötig werden, mehr als einen Verschränkungszeugen auszuwerten.

Dies führt auf die Frage, ob die in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Methode auf *alle* verschränkten Zustände angewandt werden kann. Lässt sich also immer ein Satz von Parametern (i)–(v) finden, sodass ein vorgegebener verschränkter Zustand im Detektionsbereich liegt? Da kein universeller Algorithmus zur Konstruktion von Zeugen aus der effektiven Observablen \hat{O}_{12} existiert, kann dies allgemein nicht beantwortet werden. Wir werden in den folgenden Kapiteln sehen, dass die Wechselwirkung zwischen Sonde und Zielsystem starken bis entscheidenden Einfluss auf den Erfolg einer heuristischen, auf systematischem Ausprobieren basierenden Suche hat. Des Weiteren wird stellenweise deutlich werden, dass sich augenblicklich neue Möglichkeiten ergeben, wenn man selbst aufgezwungene Forderungen abschwächt.

Vor jedem experimentellen Versuch einer Implementierung muss auch diskutiert werden, wie viele Messungen nötig sind, um die für den Erwartungswert $\langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}$ nötigen Daten aus dem Interferenzbild zu beziehen. Einem einzigen erfolgreichen Ereignis gehen womöglich hunderte wenn nicht tausende erfolglose Präparationen voraus. Je nach Aufwand einer solchen Präparation disqualifiziert sich unsere Methode von selbst.

Und schließlich müssen Zweifel ausgeräumt werden, experimentelle Unwägbarkeiten könnten bewirken, dass Verschränkung aufgespürt wird, wo gar keine ist. Dementsprechend ist eine Fehlerabschätzung bezüglich der Parameter (iv) und (v) der Sonde nötig.

Die Streuung an Festkörperstörstellen

Wir werden zunächst zeigen, dass das Konzept im vorangehenden Kapitel 3 erlaubt, einen bereits bestehenden Ansatz (Loss u. Sukhorukov 2000) zur Detektion von Verschränkung zwischen zwei Quantenpunkten (Reed 1993) in einem verglichen mit der Originalarbeit eher minimalistischen theoretischen Rahmen zu verstehen, zu reproduzieren und zu erweitern.

In diesem Kapitel betrachten wir ein einzelnes Elektron, dessen Spin mit zwei in einem symmetrischen Festkörperinterferometer vom Typ des Youngexperiments eingelassenen Spin- $\frac{1}{2}$ -Störstellen interagiert und als Sonde auf gegenseitige Verschränkung getestet. Die räumliche Distanz der magnetischen Störstellen soll dabei größer als die Reichweite ihrer direkten Wechselwirkung sein. Bei dem Interferometer handelt es sich um einen mit zwei speisenden Leitern verbundenen Aharonov-Bohm-Ring, siehe Abschnitt 1. Loss u. Sukhorukov (2000) geben durch elaborierte Behandlung mesoskopischer Transporteigenschaften und Untersuchung von Rauschen eine Antwort auf die konkrete Frage, wie Verschränkung für Elektronen in Festkörpern – als Beispiel massiver Teilchen – detektiert werden kann. Hier soll hingegen allgemein Minimalismus für eine einleuchtende Erklärung, das Superpositionsprinzip und Interferenz im Vordergrund stehen. Der Vorschlag der vorliegenden Arbeit hat den Anspruch allgemeiner Relevanz und ist vom Szenario unabhängig. Dem Aharonov-Bohm-Ring entspricht im Ansatz von Loss u. Sukhorukov (2000) ein schwach an zwei Leiter gekoppelter doppelter Quantenpunkt, Abb. 4.1. Als Sonde soll auch dort ein einzelnes Elektron verwendet werden, das von dem auch zur Strom- und Rauschmessung verwendeten

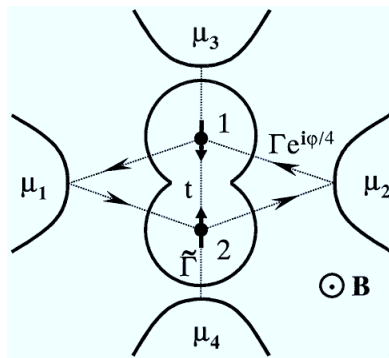


ABBILDUNG 4.1. Der doppelte Quantenpunkt von Loss u. Sukhorukov (2000). Das System enthält zwei Elektronen und ist schwach an metallische Leiter 1, ..., 4 gekoppelt, die sich auf den chemischen Potentialen μ_1, \dots, μ_4 befinden. Dies führt dazu, dass das Sondenelektron auf einem geschlossenen Pfad zwischen den Punkten und den Leitern 1 sowie 2 tunnelt und nach Anlegen eines magnetischen Feldes sich die so ergebenden Wegalternativen um eine Aharonov-Bohm-Phase ϕ unterscheiden.

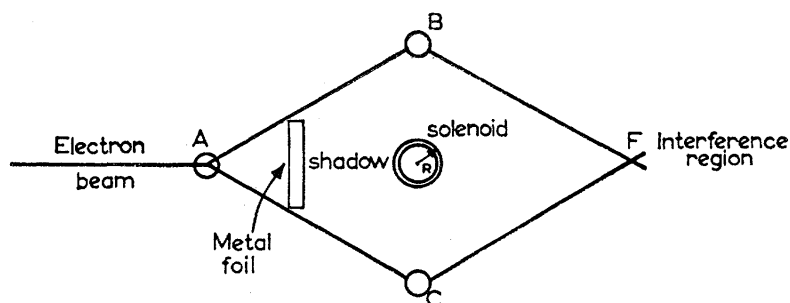


ABBILDUNG 4.2. Prinzipdarstellung zum magnetischen Aharonov-Bohm-Effekt (Aharonov u. Bohm 1959). Gezeigt ist ein Experiment, mit dem die Interferenz unter Einfluss eines zeitunabhängigen Vektorpotentials demonstriert werden kann. Die Achse der Zylinderspule (engl. Solenoid) steht senkrecht zur Papieroberfläche, die Wellenfunktion des Elektrons ist eine zweiteilige ebene Welle.

Leiter 1 (2) kommend die Möglichkeit hat, in beide Punkte zu tunneln. Es ist auf das herrschende Coulombblockaden-Regime zurückzuführen, dass stets nur ein einzelnes Elektron über virtuelle Zustände des doppelten Quantenpunkts tunneln und mit ihm interagiert.

Während sich der nun folgende erste Abschnitt zur Einführung mit Aharonov-Bohm-Ringen und dem gleichnamigen Effekt befasst, diskutieren wir in Abschnitt 2 die beiden im Festkörper eingebetteten magnetischen Einschlüsse, deren Verschränkung wir nachweisen wollen. Im Anschluss an die Motivierung für die gewählte Beschreibung der Wechselwirkung wird dann in Paragraph 3 begonnen, nach möglichen Implementierungen für Verschränkungszeugen zu forschen. Der Unterabschnitt 4 setzt schließlich diese Bemühungen in verallgemeinerter Form fort.

1. Aharonov-Bohm-Ringe und der magnetische Aharonov-Bohm-Effekt

Schaut man sich die Zahl der Veröffentlichung zu Aharonov-Bohm-Ringen an, könnte man sie womöglich als Lieblingstestumfeld derjenigen Physiker bezeichnen, die sich für quantenmechanische Phänomene in elektronischen Materialien interessieren. Bei den Ringen handelt es sich im Wesentlichen um wenige Mikrometer große Schleifen aus leitendem Material (Pierre u. Birge 2002), deren geringe Zahl (magnetischer) Verunreinigungen einen kohärenten Transport von Elektronen von einem Punkt des Ringes zur gegenüberliegenden Seite ermöglicht. Folglich kommt es zur Interferenz zwischen den Wegalternativen, die durch Einfädeln eines magnetischen Flusses durch die Schleife beobachtet werden kann. Kurz gesagt sorgt das Magnetfeld für eine Phasendifferenz zwischen den Elektronwellenfunktionen in den Armen der Anordnung, sodass das Elektron abhängig von der Feldstärke konstruktiv oder destruktiv interferiert.

Zum Zwecke einer Erklärung dieses Aharonov-Bohm-Effekts wurde in Ref. (Aharonov u. Bohm 1959) das Interferenzexperiment der Abb. 4.2 diskutiert: Dort treten die Elektronen auf der linken Seite ein, woraufhin der Strahl kohärent gemäß einem 2-Wege-Interferometer getrennt wird. Somit kann jede Änderung der relativen Phasen zwischen den Strahlen nach deren erneuter Zusammenführung auf der rechten Seite als Verschiebung des Interferenzmusters beobachtet werden. Gegen das stationäre Magnetfeld, das in die Region zwischen den beiden Strahlwegen eingebracht wird, sollen die Elektronen vollständig abgeschirmt werden, sodass deren Aufenthaltswahrscheinlichkeit dort Null beträgt. Modellhaft können wir beispielsweise annehmen, dass das Feld von einer unendlich langen, von Ablenkplatten geeignet umgebenen, stromdurchflossenen Zylinderspule mit Radius ρ_0 erzeugt wird, deren Symmetrieachse mit der \hat{z} -Richtung zusammenfällt: $\mathbf{B} = B \Theta(\rho - \rho_0) \hat{z}$, das Feld

wird also perfekt auf den Innenbereich der Spule beschränkt. Offensichtlich kann jedoch das zugehörige Vektorpotential \mathbf{A} nicht überall im Außenbereich – also im Träger der Elektronwellenfunktion – verschwinden, da der magnetische Fluss durch jede von einem den Ursprung umlaufenden, d.h. nicht einfach zusammenhängenden Pfad $\partial\Gamma$ eingeschlossene Fläche Γ konstant ungleich Null ist¹:

$$(4.1) \quad \Phi(\Gamma) = \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dS = \int_{\partial\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}.$$

In Gaußschen Einheiten lautet der Hamiltonian dieses Problems und die Ortsdarstellung der zeitunabhängigen Elektronwellenfunktion für jedes einfach zusammenhängende Gebiet

$$(4.2) \quad H = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}/c)^2,$$

$$(4.3) \quad \psi = \psi^{(0)} e^{-i\phi/\hbar},$$

wobei $\psi^{(0)}$ die Lösung für $\mathbf{A} = 0$, d.h. in Abwesenheit des eingeschlossenen Magnetfeldes, und $\nabla\phi/\hbar = e\mathbf{A}/c$ ist. Es muss berücksichtigt werden, dass der Außenbereich der Spule mehrfach zusammenhängend und daher im Allgemeinen nicht jedes Element des Definitionsbereichs der Funktion (4.3) auf ein einziges, wohl definiertes Element des Bildbereiches abgebildet wird. Es handelt sich nicht mehr um eine gültige Lösung der Schrödingergleichung. In der bewusst simpel gewählten Geometrie lässt sich jedoch das Problem (ganz im Sinne der bereits vorgestellten abstrakten Beschreibung binärer Interferometer) mit einer Superposition $\psi = \psi_A + \psi_B$ zweier Wellenfunktionen $\psi_{A,B} = \psi_{A,B}^{(0)} e^{-i\phi_{A,B}/\hbar}$ mit Phasen $\phi_{A,B} = e \int_{\gamma_{A,B}} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}/c$ behandeln. Die Wegintegrale laufen dabei entlang der jeweils durch einfach zusammenhängende Gebiete propagierenden Strahlen A und B , $\partial\Gamma = \gamma_B - \gamma_A$. Deren Interferenz wird folglich von der Differenz $\phi = \phi_B - \phi_A = e\Phi/\hbar c$ der Phasen abhängen: Das Muster ist eine periodische Funktion des magnetischen Flusses Φ , die Periode beträgt $2\pi\hbar c/e$.

Es ist damit gezeigt, dass trotz der Eichfreiheit in einem feldfreien, mehrfach zusammenhängenden Gebiet des Raumes die physikalischen Eigenschaften des Systems vom magnetischen Potential \mathbf{A} abhängen. Dies steht im Widerspruch zur klassischen Beschreibung, in der die elektromagnetischen Potentiale als mathematische Helfer betrachtet werden und demgemäß nur die Felder durch Auftauchen in den Bewegungsgleichungen physikalische Bedeutung erlangen: Klassisch kann das Potential \mathbf{A} den Effekt nicht erzeugen. Experimentell war jedoch schnell klar (Peshkin u. Tonomura 1989), dass die Wirkung magnetischer Felder in abgeschirmten Gebieten von der Quantenmechanik korrekt beschrieben wird, da in den kanonischen Formalismus die Potentiale direkt eingehen, (4.2). Folglich liefern die lokal observablen Maxwellfelder eine unzureichende Beschreibung der Physik. Hingegen geben die nichtobservablen Potentiale mehr als hinreichende Informationen: Durch Eichtransformationen verknüpfte Potentiale beschreiben dieselbe Physik. Die sowohl hinreichende als auch notwendige Beschreibung erfolgt allein durch die Phasenfaktoren ϕ .

2. Magnetische Einschlüsse und Spin-Umklapp-Wechselwirkung

In einem realistischen mesoskopischen Szenario streut das Elektron sowohl magnetisch als auch räumlich mit den Störstellen. Zwanglos führt dies auf die Studie des Kondoeffekts (Hewson 1997), d.h. dem Verhalten des elektrischen Widerstands in mit magnetischen Störstellen durchsetzten Metallen. Für Übergangsmetallionen, die mittels ihres lokalen magnetischen Moments nachweislich als Störstelle im metallischen Leiter auftreten, wird die Streuung traditionell mit einem s-d-Austausch-Hamiltonian beschrieben. Die Störstellen treten

¹Tatsächlich gilt (in Zylinderkoordinaten)

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} B \hat{\mathbf{e}}_{\varphi} \begin{cases} \rho, & \rho \leq \rho_0 \\ \rho_0^2/\rho, & \rho > \rho_0. \end{cases}$$

in diesem Modell als lokalisierte Spins auf, die mit den Leitungselektronen durch einen Umklappprozesse beschreibenden Austauschterm wechselwirken (Hewson 1997, Kap. 1.5). Kürzlich wurde experimentell der Einfluss dieser Spin-Umklappprozesse auf Aharonov-Bohm-Oszillationen studiert (Pierre u. Birge 2002) und es gelang dadurch, die Präsenz von sehr wenigen magnetischen Störstellen nachzuweisen.

Um der Klarheit willen zeichnen wir die Vorgänge im Festkörper in einem stark vereinfachten ballistischen Bild (Washburn u. Webb 1992), in welchem wir uns die Pfadalternativen des Elektrons als eindimensionale nichtmagnetische Leiter vorstellen, in die die beiden magnetischen Spin- $\frac{1}{2}$ -Störstellen eingelassen sind, Abb. 4.3. Diese Anschauung mag gerechtfertigt sein, falls alles, was im folgenden relevant ist, auf einer Längenskala kleiner als der mittleren freien Weglänge geschieht, d.h. der Wirkungsquerschnitt der Leiter bezüglich störender Streueffekte klein genug ist. Auch die Wechselwirkung zwischen dem Spin des als Sonde dienenden Elektrons und einer der beiden magnetischen Störstellen soll phänomenologisch modelliert werden. Wir ziehen dazu den sehr simplen *Spin-Flip-Hamiltonian*

$$(4.4) \quad V_{A,B} = \hbar \sum_i g_{1,2}^i \sigma_S^i \sigma_{1,2}^i$$

heran (wie z.B. bei Costa Jr. u. a. 2006). Die Parameter $\{g_{1,2}^i\}$ geben die Stärke der hier als anisotrop angenommenen Kopplung an und werden als experimentell veränderlich angesehen. Im einfachsten Fall also erfährt das Elektron dieselbe Wechselwirkung durch beide Störstellen. Wohlgemerkt konzentrieren wir uns ausschließlich auf die Spinfreiheitsgrade und sehen von der räumlichen Beschreibung ab.

Komplett auf die Ortsfreiheitsgrade zu verzichten, mag nicht sehr realistisch sein und eignet sich in den allermeisten Fällen nur als wegbereitende Idealisierung. Dennoch, möglicherweise bieten hierfür von akustischen Oberflächenwellen gefangene und mit gleichmäßiger Geschwindigkeit getragene Elektronen ein Szenario (Barnes u. a. 2000). Die Idee basiert auf dem Herausgreifen von Elektronen aus einem zweidimensionalen Elektronengas: Ein angelegtes Magnetfeld sorgt dafür, dass die danach in einem quasi-eindimensionalen Kanal mit der Oberflächenwelle transportierten Teilchen in einem kontrollierbaren, reinen Spinzustand vorliegen, mit dem sie dann magnetisch – ohne räumliche Streuung, sondern nur aufgrund des nahen Vorbeilaufens – mit den räumlich festen Störstellen wechselwirken könnten. Durch Anpassung der Propagationsgeschwindigkeit sollte dann die Wechselwirkungszeit regulierbar sein.

Welche Beziehung besteht nun zu den Quantenpunkten aus Ref. (Loss u. Sukhorikov 2000)? Es stellt sich heraus (siehe auch Burkard u. a. 2000, Kap. 6.3), dass die in der Veröffentlichung beschriebene effektive Austauschkopplung zwischen den Spins der Elektronen in Reservoir und Quantenpunkten tatsächlich identisch zu unserer effektiven Spin-Umklapp-Wechselwirkung von Sondenelektron und Spin- $\frac{1}{2}$ Störstellen ist. Wir können daher das Problem der Detektion von Verschränkung mit unseren sehr viel einfacheren handwerklichen Mitteln diskutieren.

3. Realisierung des Singulettzeugen

Nach der Besprechung der physikalischen Situation beschäftigen wir uns nun mit der Implementierung von Verschränkungszeugen. Wir betrachten dazu allgemein Zeugen der Form

$$(4.5) \quad W_U = \mathbb{1} - 2 U |\Phi_+\rangle_{1212} \langle \Phi_+| U^\dagger,$$

wobei $|\Phi_+\rangle_{12} = (|00\rangle_{12} + |11\rangle_{12})/\sqrt{2}$ der *kanonisch maximal verschränkte Zustand* (Hayashi 2006) der Qubits 1 und 2 ist und zu den vier Bellzuständen gehört. Für U wollen wir nur lokale, d.h. hier unkorrelierte, unitäre Transformationen der Art $U = \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ mit beliebigen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in U(2) = U(1) \times SU(2)$ zulassen, wobei $U(1)$ die multiplikative Gruppe aller

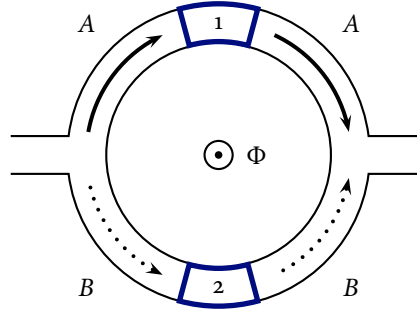


ABBILDUNG 4.3. Elektronisches Aharonov-Bohm-Interferometer mit Spin- $\frac{1}{2}$ -Störstellen 1, 2 und magnetischem Fluss Φ . Das durch den Ring propagierende Elektron stößt auf zwei sich gegenseitig ausschließende Pfadalternativen: Entweder besucht es die erste Störstelle, indem es Arm A wählt, oder es wechselwirkt mit der zweiten auf Weg B, jeweils beschrieben durch den Spin-Flip-Hamiltonian der Gleichung (4.4).

komplexen Zahlen mit Absolutbetrag 1 bezeichnet: $U(1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Der Erwartungswert des Zeugen W_U ist nichtnegativ für alle separablen Zustände, denn der Überlapp eines jeden separablen reinen Zustands, d.h. eines jeden Produktzustands, und dem maximal verschränkten Zustand $U|\Phi_+\rangle_{12}$ ist $\frac{1}{2}$, siehe Anhang A, Unterabschnitt 3². Daher detektiert W_U alle verschränkten Zustände ρ_{12} mit ${}_{12}\langle\Phi_+|U^\dagger\rho_{12}U|\Phi_+\rangle_{12} > \frac{1}{2}$. Die Idee ist im Folgenden, zunächst für eine bestimmte Transformation \tilde{U} eine Konfiguration der Parameter (ii)–(v) mit $\hat{O}_{12} \propto W_{\tilde{U}}$ zu finden. Mit dieser als Grundlage sollen anschließend weitere Konfigurationen nun aber für beliebige U mittels lokaler unitärer Transformationen bestimmt werden.

Die folgende Wahl der vertrauten Parameter realisiert nun den optimalen Verschränkungszeugen³

$$(4.6) \quad W_- = \mathbb{1} - 2|\Psi_-\rangle_{12}{}_{12}\langle\Psi_-| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

des maximal verschränkten Singulettzustands $|\Psi_-\rangle_{12} = i\sigma_1^2|\Phi_+\rangle_{12} = \tilde{U}|\Phi_+\rangle_{12}$:

(ii) Durch die Wahl $\hat{O}_Q = \sigma_Q^1$ werten wir die Kohärenzen des Quantons zu gleichen Teilen aus. In einer symmetrischen Anordnung wie der der Abb. 4.3 findet die Wechselwirkung in beiden Armen jeweils während der Zeit t statt und induziert die unitäre Zeitentwicklung

$$(4.7) \quad T_{A,B} = e^{-iV_{A,B}t/\hbar} = \alpha_{1,2}(t) (\mathbb{1} + \sigma_S \cdot \sigma_{1,2}) - \sum_{i=1}^3 \beta_{1,2}^i(t) \sigma_S^i \sigma_{1,2}^i$$

mit $\alpha_{1,2}(t) = \prod_i \cos(g_{1,2}^i t) - i \prod_i \sin(g_{1,2}^i t)$ und $\beta_{1,2}^i(t) = e^{ig_{1,2}^i t} \cos((\sum_j g_{1,2}^j - g_{1,2}^i)t)$. Seien nun die Kopplungen experimentell so eingestellt, dass die Wechselwirkung isotrop wird mit $g_1^i = g_2^i = \pi/4t$, $i = 1, 2, 3$.

(iii) Dann ist

$$(4.8) \quad T_{A,B} = e^{-i\pi/4} (\mathbb{1} + \sigma_S \cdot \sigma_{1,2})/2$$

²Die W_U sind zudem optimal: Aus den Ausführungen im Anhang wird klar, dass sich für jedes U ein Produktzustand $|\psi\rangle$ mit $|\langle\psi|U|\Phi_+\rangle|^2 = \frac{1}{2}$ finden lässt. Die Ebene des charakteristischen Vorzeichenwechsels verläuft also tangential zu \mathcal{S} .

³Die Matrixdarstellung erfolgt hier natürlich in der Standardbasis des Systems 12.

und damit $\mathcal{U}^{\otimes 3} T_{A,B}^{(\dagger)} \mathcal{U}^{\otimes 3\dagger} = T_{A,B}^{(\dagger)}$ für alle $\mathcal{U} \in \text{U}(2)$. Letztere Eigenschaft, die sich aus der Isotropie von $T_{A,B}^{(\dagger)}$ in den Generatoren von $\text{SU}(2)$ erklärt, erweist sich später als besonders nützlich.

(iv) Wird der Elektronenspin unpolarisiert gewählt, $\rho_S = \mathbb{1}/2$, und (v) verzichtet man auf dessen nachträgliche Auslese, $\hat{O}_S = \mathbb{1}$, erhält man schließlich

$$(4.9) \quad \hat{O}_{12} = \text{tr}_S[\rho_S(T_B^\dagger \hat{O}_S T_A + \text{h.c.})] = \frac{1}{2} \text{tr}_S[T_B^\dagger T_A + \text{h.c.}] = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2) = W_-.$$

Da $\hat{O}_{QS} = \sigma_Q^1$ ist, liegt es nahe, den Erwartungswert $\langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}}$ über den Interferenzkontrast bei $\phi = 0$ zu bestimmen:

$$(4.10) \quad \langle \hat{O}_Q \rangle_{\rho'_Q} = 2p'(0) - 1 = \langle W_- \rangle_{\rho_{12}} / \langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M} = \frac{1}{2} \langle W_- \rangle_{\rho_{12}}.$$

Die Detektion verläuft dann wie in Abb. 3.3 auf Seite 22 illustriert: Liegt bei $\phi = 0$ destruktive Interferenz vor, weiß man genau, dass die beiden Störstellen verschränkt waren und darüber hinaus der verschränkte Zustand deutlichen Überlapp mit dem maximal verschränkten Singulettzustand $|\Psi_- \rangle_{12}$ hatte. Demzufolge haben wir an dieser Stelle die Vorhersage von Loss u. Sukhorukov (2000) wieder gefunden, dass die Aharonov-Bohm-Oszillationen eines im Singulettzustand verschränkten doppelten Quantenpunkts ein charakteristisches Minuszeichen zeigen.

3.1. Diskussion. Wir wollen mit einem heuristischen Argument zeigen, dass die gegenwärtige Wahl der Parameter (i)–(v) wie behauptet eine Situation schafft, in der der Interferenzkontrast ein unzweideutiges Kriterium für Verschränkung liefert. Wir werden dazu sehen, dass der Singulettzustand $|\Psi_- \rangle_{12}$ von den drei Triplettzuständen $|00 \rangle_{12}$, $|\Psi_+ \rangle_{12} = (|01 \rangle_{12} + |10 \rangle_{12})/\sqrt{2}$ sowie $|11 \rangle_{12}$ eindeutig unterschieden werden kann, während das Triplett selbst nicht aufzulösen ist. Da die Projektoren auf diese Zustände einen vollständigen Satz orthonormaler Observablen bilden, lassen sich die Ergebnisse ihrer Messungen auch als von-Neumannmessung einer einzigen Observable mit den Eigenzuständen $|\Psi_- \rangle_{12}$, $|00 \rangle_{12}$, $|\Psi_+ \rangle_{12}$ sowie $|11 \rangle_{12}$ auffassen. Dies definiert einen Test für (4.10), denn präparieren wir nacheinander diese vier Basiszustände und finden wir daraufhin bei einer Messung von $\langle \sigma_Q^1 \rangle_{\rho'_Q}$ den Eigenwert $-\frac{1}{2}$ für den Singulett- und den (dreifach entarteten) Eigenwert $\frac{1}{2}$ für die Triplettzustände, wissen wir, dass wir bis auf einen irrelevanten Faktor die Observable $\hat{O}_{12} = W_-$ und damit den gewünschten Singulettzeugen implementiert haben⁴.

Falls die beiden Spin- $\frac{1}{2}$ -Störstellen zu Anfang im Singulettzustand vorliegen, erhält nach Gleichung (4.10) die Interferenzfigur verglichen zu den Triplettkonfigurationen die zusätzliche Phase $\alpha = \pi$, sodass der Interferenzbeitrag bei $\phi = 0$ aufgrund destruktiver Interferenz minimal und negativ wird. Dies ist gerade das Kriterium, nach dem unterschieden wird. Nach (2.21) gilt

$$(4.11) \quad p'(\phi) = \frac{1}{2} + \frac{e^{i\phi} \langle T_B^\dagger T_A \rangle_{\rho_M} + e^{-i\phi} \langle T_A^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}}{2 \langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \cos \phi \langle W_- \rangle_{\rho_{12}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \cos \phi.$$

Tatsächlich lässt sich dies im Detail verstehen. Zu Beginn wählen wir das Sondenelektron in der maximal gemischten Konfiguration, der inkohärenten Überlagerung von $|0 \rangle_S$ und $|1 \rangle_S$ bzw. $|\uparrow_z \rangle_S \equiv |\uparrow \rangle_S$ und $|\downarrow_z \rangle_S \equiv |\downarrow \rangle_S$. Wir werden $|\uparrow \rangle_S$ und $|\downarrow \rangle_S$ getrennt diskutieren und anschließend die Ergebnisse durch simple Addition zusammenfassen.

Beginnen wir mit dem erstgenannten Zustand. Seien zusätzlich die beiden im Ring eingebetteten Störstellen in einem der maximal verschränkten Zustände $|\Psi_\pm \rangle_{12} = (|\uparrow\downarrow \rangle_{12} \pm |\downarrow\uparrow \rangle_{12})/\sqrt{2}$. Auf beiden Pfaden tauscht das Elektron aufgrund der isotropen Spin-Umklapp-Wechselwirkung (4.8) seine Polarisierung mit der jeweiligen Störstelle. Die Pfadalternativen können nur dann interferieren, wenn die Markerendzustände auf beiden Pfaden nicht verschwindenden Überlapp haben, d.h. sich zumindest teilweise überschneiden. Dies sieht man auch an Gleichung (4.11), wo der Interferenzbeitrag allein durch den Überlapp von

⁴Man überzeuge sich davon, dass $W_- = -|\Psi_- \rangle \langle \Psi_-| + |00 \rangle \langle 00| + |\Psi_+ \rangle \langle \Psi_+| + |11 \rangle \langle 11|$.

$T_A|\uparrow\rangle_S|\Psi_{\pm}\rangle_{12}$ und $T_B|\uparrow\rangle_S|\Psi_{\pm}\rangle_{12}$ bestimmt wird. Da Spinzustände entgegengesetzter Polarisierung absolut unterscheidbar und damit orthogonal sind, spielen für die Interferenz bei $|\Psi_{\pm}\rangle_{12}$ nur diejenigen Zustände der Superpositionen eine Rolle, die *auf beiden Pfaden* durch Umklappen verändert worden sind, d.h.

$$(4.12a) \quad \langle T_A^\dagger T_B \rangle_{\rho_M} = \langle T_B^\dagger T_A \rangle_{\rho_M} = \pm \frac{1}{2} S_{12} \langle \uparrow\uparrow\downarrow | T_B^\dagger T_A | \uparrow\uparrow\downarrow \rangle_{S_{12}} = \pm \frac{1}{2} S_{12} \langle \downarrow\downarrow\uparrow | \uparrow\uparrow\downarrow \rangle_{S_{12}} = \pm \frac{1}{2}.$$

Gleiches gilt, falls das Elektron zu Beginn im Zustand $|\downarrow\rangle_S$ polarisiert ist,

$$(4.12b) \quad \langle T_A^\dagger T_B \rangle_{\rho_M} = \langle T_B^\dagger T_A \rangle_{\rho_M} = \pm \frac{1}{2} S_{12} \langle \downarrow\downarrow\uparrow | T_B^\dagger T_A | \downarrow\downarrow\uparrow \rangle_{S_{12}} = \pm \frac{1}{2} S_{12} \langle \uparrow\downarrow\uparrow | \downarrow\downarrow\uparrow \rangle_{S_{12}} = \pm \frac{1}{2}.$$

Alle anderen möglichen Endzustände wären orthogonal. Damit gilt obiges Ergebnis auch für die inkohärente Superposition $\rho_S = \mathbb{1}/2$. Entscheidend für die Funktion als Verschränkungszeuge ist, dass in die Kreuzterme die Phase zwischen $|\uparrow\downarrow\rangle_{12}$ und $|\downarrow\uparrow\rangle_{12}$ eingeht.

Widmen wir uns abschließend den beiden übrigen unverschränkten Tripletzuständen $|\uparrow\uparrow\rangle_{12}$ und $|\downarrow\downarrow\rangle_{12}$. Die beiden Pfadalternativen interferieren unter diesen Umständen nur dann, wenn das Elektron anfänglich in der jeweils zu den Störstellen gleich gerichteten Polarisation vorliegt. Bei der statistischen Mischung $\rho_S = \mathbb{1}/2$ beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür $1/2$, es ist für $|\uparrow\uparrow\rangle_{12}$

$$(4.13a) \quad \langle T_A^\dagger T_B \rangle_{\rho_M} = \langle T_B^\dagger T_A \rangle_{\rho_M} = \frac{1}{2} S_{12} \langle \uparrow\uparrow\uparrow | T_B^\dagger T_A | \uparrow\uparrow\uparrow \rangle_{S_{12}} = \frac{1}{2}$$

und ebenso für $|\downarrow\downarrow\rangle_{12}$

$$(4.13b) \quad \langle T_A^\dagger T_B \rangle_{\rho_M} = \langle T_B^\dagger T_A \rangle_{\rho_M} = \frac{1}{2} S_{12} \langle \downarrow\downarrow\downarrow | T_B^\dagger T_A | \downarrow\downarrow\downarrow \rangle_{S_{12}} = \frac{1}{2}.$$

Allein für den Singulettzustand findet man demnach destruktive Interferenz. Hingegen ist das Interferenzmuster für jeden der drei Tripletzustände identisch, man kann sie nicht unterscheiden. Damit ist alles gezeigt.

4. Realisierung weiterer Zeugen

Wie angekündigt wollen wir nun das Ergebnis (4.9) verwenden, um zusätzliche Zeugen zu implementieren. Diesem Gedanke folgend stellt man zu Beginn fest, dass für jede lokale unitäre Transformation $U \in U(2) \times U(2)$ die Verknüpfung

$$(4.14) \quad W_U = U \tilde{U}^\dagger W_- \tilde{U} U^\dagger = U \sigma_1^2 W_- \sigma_1^2 U^\dagger = (\mathcal{U}_1 \otimes \mathbb{1}_2) W_- (\mathcal{U}_1^\dagger \otimes \mathbb{1}_2) \equiv \mathcal{U}_1 W_- \mathcal{U}_1^\dagger$$

mit $\mathcal{U} \in U(2)$ besteht⁵, denn wie für isotrop gewählte $T_{A,B}^{(\dagger)}$ gilt für den optimalen Singulett-Zeugen $\mathcal{U}^{\otimes 2} W_- \mathcal{U}^{\otimes 2\dagger} = W_- = (\mathbb{1} + \sigma_1 \cdot \sigma_2)/2$. Außerdem wurde die Abgeschlossenheit der Gruppe unter der Matrixmultiplikation angewandt. Ferner findet von nun an die Kurzschreibweise \mathcal{U}_1 für $(\mathcal{U}_1 \otimes \mathbb{1}_2)$ Verwendung, sofern Verwechslung ausgeschlossen ist. Mit der unitären Transformation \mathcal{U} wird die Ebene des charakteristischen Vorzeichenwechsels des Zeugen W_- so gedreht, dass er statt bezüglich des Singulettzustands $|\Psi_- \rangle$ nun optimal in Bezug auf den Zustand $\mathcal{U}_1|\Psi_- \rangle$ ist. Dieser soll im Folgenden die Bezeichnung $|\Psi_{\mathcal{U}} \rangle$ tragen.

Man sieht sofort ein, dass im Falle $\mathcal{U} \neq \pm \mathbb{1}$ die Isotropie des Verschränkungszeugen W_U in den Paulimatrizen gebrochen wird. Beispielsweise kann der Zeuge für den Tripletzustand $|\Psi_+ \rangle_{12}$ nur als deren anisotrope Kombination geschrieben werden, nämlich als

$$(4.15) \quad W_+ = \frac{1}{2} (\mathbb{1} - \sigma_1^1 \sigma_2^1 - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^3 \sigma_2^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies gibt Anlass, über zwei mögliche Implementierungsverfahren nachzudenken.

⁵Die unitäre Transformation \tilde{U} wird kurz nach Gleichung (4.6) auf Seite 29 definiert.

4.1. Finetuning der Wechselwirkung. Die erste Option stammt von Loss u. Sukhorikov (2000). Sie schlagen das Anlegen eines inhomogenen magnetischen Feldes vor, welches eine (Berry-)Phasendifferenz (Berry 1984; Zwanziger u. a. 1990) zwischen verschiedenen Armen des Interferometers und Spinkomponenten erzeugt. Diese Maßnahme bricht sowohl die räumliche Symmetrie der Wechselwirkung als auch die Invarianz unter Vertauschung der Spins 1 und 2. In der Beschreibung mittels des Hamiltonians (4.4) kommt diesem Ansatz ein Abstimmen der Kopplungsstärken $\{g_{1,2}^i\}$ gleich. Für $\rho_S = \mathbb{1}/2$, $\hat{O}_S = \mathbb{1}$ gelangt man zu

$$(4.16) \quad \hat{O}_{12} = 2 \left\{ \text{Re}(\alpha_1 \alpha_2^*) \mathbb{1} + \sum_i \text{Re}((\alpha_1 - \beta_1^i)(\alpha_2 - \beta_2^i)^*) \sigma^i \otimes \sigma^i \right\}.$$

Da man bei diesem designierten Zeugen Diagonalgestalt in der Paulidarstellung vorfindet, ist die Zahl der erreichbaren W_U stark einschränkt. Zumindest die vier Bellzustände lassen sich so jedoch detektieren. Beispielsweise kann die Triplettwitness realisiert werden, indem die bisherige Wahl $g_1^i = g_2^i = \pi/4t$ für alle $i = 1, 2, 3$ mit jedoch zwei Ausnahmen beibehalten wird: Die Komponenten $i = 1$ und 2 müssen für einen der beiden Spins eine stärkere Wechselwirkung $3\pi/4t$ sehen⁶.

4.2. Finetuning der Sonde. Eleganter und leistungsfähiger wäre es jedoch, gelänge die Umsetzung anderer Verschränkungszeugen ohne die Hilfe zusätzlicher magnetischer Kontrollfelder, sondern allein durch Anpassen und Messen der Eigenschaften des Sonden elektrons sowie Bewahren der einfachen isotropen Wechselwirkung. Tatsächlich ist dies möglich, denn zu Beginn stößt man wegen (4.9) auf die Beziehung

$$(4.17a) \quad W_U = \frac{1}{2} \text{tr}_S [\mathcal{U}_1 T_B^\dagger T_A \mathcal{U}_1^\dagger + \text{h.c.}],$$

die sich unter zweifacher Verwendung der Identität $\mathcal{U}_1 T_A^{(\dagger)} \mathcal{U}_1^\dagger = \mathcal{U}_S^\dagger T_A^{(\dagger)} \mathcal{U}_S$ sofort in

$$(4.17b) \quad = \frac{1}{2} \text{tr}_S [\mathcal{U}_S T_B^\dagger \mathcal{U}_S^\dagger T_A + \mathcal{U}_S^\dagger T_A^\dagger \mathcal{U}_S T_B]$$

verwandelt. Um das Ergebnis in der gewünschten Form $\text{tr}_S [\rho_S (T_B^\dagger \hat{O}_S T_A + T_A^\dagger \hat{O}_S T_B)]$ schreiben zu können - d.h. mit $\rho_S \sim \mathcal{U}_S$ und $\hat{O}_S = \mathcal{U}_S$ -, muss \mathcal{U} hermitesch gefordert werden, was die Wahl der \mathcal{U} wie folgt einschränkt: In der universellen Parametrisierung

$$(4.18) \quad \mathcal{U} = (\cos \alpha \mathbb{1} + i \sin \alpha (\hat{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{\sigma})) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, n_{\alpha_i}, \theta \in \mathbb{R}$, $\hat{n}_\alpha^2 = 1$, erhält man nach kurzer Rechnung

$$(4.19) \quad \|\mathcal{U} - \mathcal{U}^\dagger\|_{\text{HS}} = 8 \left\{ \cos^2(\theta/2) - \cos \theta (\sin(\theta/2) \sin \alpha n_{\alpha_3} + \cos(\theta/2) \cos \alpha)^2 \right\}.$$

Für ein Verschwinden der Hilbert-Schmidt-Norm (und damit $\mathcal{U} = \mathcal{U}^\dagger$) gibt es nur zwei Möglichkeiten:

$\theta = k\pi \wedge \alpha = \tilde{k}\pi$, $k, \tilde{k} \in \mathbb{Z}$. Dann ist jedoch $\mathcal{U} = \pm \mathbb{1}$ und gänzlich uninteressant, weil dies wieder auf W_- zurückführt.

$\theta = (2k+1)\pi \wedge n_{\alpha_3} = 0$, $k \in \mathbb{Z}$. Dieser Fall ist ungleich vielversprechender, man findet $\mathcal{U} = (-\sin \alpha n_{\alpha_2}, \sin \alpha n_{\alpha_1}, \cos \alpha) \cdot \boldsymbol{\sigma} \equiv \hat{n}' \cdot \boldsymbol{\sigma}$, da $n_{\alpha_1}^2 + n_{\alpha_2}^2 = 1$.

(iv) Wir wählen demzufolge die zweite Möglichkeit, müssen dabei aber einen Kompromiss eingehen: Wir definieren $\rho_S = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathcal{U}_S)$ und stellen im Zuge dessen sicher, dass ρ_S nichtnegativ und somit wohldefiniert ist. Wir nehmen gleichzeitig in Kauf, dass ein solcher reiner Zustand der Elektronpolarisation mit heutigen Mitteln der Spintronik nicht herzustellen ist (Braun u. a. 2004).

⁶Für $|\Phi_+\rangle_{12}$ sind es dann die Komponenten $i = 1$ und 3, den Verschränkungszeugen zu $|\Phi_-\rangle_{12}$ realisiert man mit der Anpassung von g_1^i sowie g_3^i .

(v) Die Sondenobservable setzen wir hingegen einfach zu $\hat{O}_S = \mathcal{U}_S$ fest. Wir haben

$$(4.20a) \quad \langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}} = \langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}} / \langle T_A^\dagger T_A + T_B^\dagger T_B \rangle_{\rho_M}$$

$$(4.20b) \quad = \langle \hat{O}_{12} \rangle_{\rho_{12}} / 2$$

$$(4.20c) \quad = \frac{1}{2} \langle W_U \rangle_{\rho_{12}} + \frac{1}{4} \langle \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \rangle_{\rho_{12}}.$$

Im eingeschlagenen Mittelweg weicht also die auf dem Zielsubsystem operierende Observable \hat{O}_{12} vom gesuchten Zeugen W_U ab. Es muss untersucht werden, ob der Erwartungswert (4.20c) im Falle von Verschränkung ein verwertbares charakteristisches Verhalten zeigt und insbesondere, inwieweit ein verschränkter Zustand detektiert werden kann. Sei dazu $|\psi\rangle_{12}$ ein beliebiger separabler wie auch reiner Zustand des Zielsubsystems 12. Die Restriktion auf reine Zustände erfolgt ohne Beschränkung der allgemeinen Gültigkeit der nun folgenden Argumentation⁷. Man berechnet zunächst

$$(4.21a) \quad {}_{12}\langle \psi | \hat{O}_{12} | \psi \rangle_{12} = {}_{12}\langle \psi | \mathcal{U}_1 \{ W_- + \frac{1}{2}(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) \} \mathcal{U}_1 | \psi \rangle_{12},$$

wobei jedoch durch $|\psi'\rangle_{12} = \mathcal{U}_1 |\psi\rangle_{12}$ gleich ein neuer Produktzustand gegeben ist. Demzufolge können wir für obigen Erwartungswert auch

$$(4.21b) \quad = {}_{12}\langle \psi' | W_- | \psi' \rangle_{12} + \frac{1}{2} {}_{12}\langle \psi' | \mathcal{U}_1 | \psi' \rangle_{12} + \frac{1}{2} {}_{12}\langle \psi' | \mathcal{U}_2 | \psi' \rangle_{12}$$

schreiben. Mit der Parametrisierung $|\psi'\rangle_{12} \langle \psi'| = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + \hat{p}'_1 \cdot \sigma_1)(\mathbb{1} + \hat{p}'_2 \cdot \sigma_2)$, $|\hat{p}'_{1,2}| = 1$, finden wir im Anschluss daran

$$(4.21c) \quad = \frac{1}{2}(1 + \hat{p}'_1 \cdot \hat{p}'_2 + \hat{n}' \cdot \hat{p}'_1 + \hat{n}' \cdot \hat{p}'_2)$$

und erkennen schließlich, dass für alle separablen Zustände ρ_{12} der fragliche Erwartungswert $\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}}$ nur Werte von $-\frac{1}{8}$ bis 1 annehmen kann. Liegt ein Ergebnis $\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}} < -\frac{1}{8}$ vor, war ρ_{12} demnach verschränkt. Es gibt zwar keinen charakteristischen Vorzeichenwechsel wie sonst bei Verschränkungszeugen üblich, aber die Unterschreitung des Schwellenwertes $-\frac{1}{8}$ ist wie sich hier herausstellt als Kriterium für Verschränkung ebenso geeignet.

Vielleicht sollte am Rande die Bemerkung erlaubt sein, dass, falls man auf den charakteristischen Vorzeichenwechsel besteht, dieser durch Anpassung der Quantenobservable \hat{O}_Q herzustellen ist: Sei zunächst allgemein $\hat{O}_Q = u \sigma_Q^0 + v \sigma_Q^1 + w \sigma_Q^2$. Dann ist kurz gesagt

$$(4.22a) \quad \hat{O}_{12} = v W_U + (u + \frac{v}{2})(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) + w \hat{n}' \cdot (\sigma_1 \times \sigma_2)$$

und tatsächlich können die Parameter so gewählt werden, dass \hat{O}_{12} gleich

$$(4.22b) \quad = W_U$$

ist: Man liest aus Gl. (4.22a) ab, dass dies mit $v = 1 = -2u$ sowie $w = 0$ gelingt.

4.3. Sortierung von Messergebnissen. Widmen wir uns darüber hinaus der Frage, ob eine Detektion der maximal verschränkten Zustände $|\Psi_{\mathcal{U}}\rangle_{12}$ auch über die aller Voraussicht nach simplere Messung der relativen Detektionsintensität einer einzigen Interferenzfigur möglich ist. $\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}}$ wird zwar durch die Interferenz mitbestimmt, der Erwartungswert lässt sich aber im Allgemeinen nicht elementar aus lediglich einem Interferenzbild gewinnen und im Speziellen hier nicht, da $\hat{O}_S = \mathcal{U}_S$ keinen Projektor definiert. Daher ist zu untersuchen, ob die Sortierung in (jeweils durch das Resultat der Messung von \hat{O}_S gekennzeichnete) Subensembles der In-situ-Messung von $\langle \hat{O}_{QS} \rangle_{\rho'_{QS}}$ überlegen ist. Das Verfahren wurde

⁷Jeder gemischte Zustand ρ lässt sich als Konvexkombination reiner Zustände darstellen: $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Dabei summieren sich die Wahrscheinlichkeiten $p_i > 0$ (aufgrund der bekannten Anforderung an die Spur) zu Eins, es ist $\sum_i p_i = 1$. Der Erwartungswert einer Observable, beispielsweise des Verschränkungszeugen W , schreibt sich somit auch $\langle W \rangle_\rho = \sum_i p_i \langle \psi_i | W | \psi_i \rangle$. In der Summe tauchen die Erwartungswerte bezüglich der reiner Zustände auf. Lässt sich für diese eine obere (untere) Schranke angeben, kann auch der Erwartungswert bezüglich ρ diese nicht überschreiten (unterschreiten).

abstrakt bereits in den Abschnitten 2.1 und 2.2 ab Seite 19 vorgestellt. Die Spektralzerlegung von \mathcal{U}_S lautet trivialerweise

$$(4.23) \quad \hat{O}_S = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathcal{U}_S) - \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \mathcal{U}_S) \equiv \hat{P}_S^{(+)} - \hat{P}_S^{(-)}.$$

4.3.1. *Betrachten wir zunächst $\hat{P}_S^{(+)}$ und verallgemeinern auf $\hat{O}_Q = u \sigma_Q^0 + v \sigma_Q^1 + w \sigma_Q^2$. Schnell findet man*

$$(4.24a) \quad \hat{O}_{12}^{(+)} = \sum_{i,j} \langle i | \hat{O}_Q | j \rangle_Q \text{tr}_S [\rho_S T_j^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_i]$$

$$(4.24b) \quad = u \text{tr}_S [\rho_S (T_A^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_A + T_B^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_B)] \\ + v \text{tr}_S [\rho_S (T_B^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_A + T_A^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_B)] \\ + iw \text{tr}_S [\rho_S (T_A^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_B - T_B^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_A)]$$

$$(4.24c) \quad = u \mathbb{1} + \frac{v}{2} (W_- + W_U) + \frac{1}{2} (u + v) (\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2)$$

$$(4.24d) \quad = u (|\Psi_- \rangle_{1212} \langle \Psi_-| + |\Psi_{\mathcal{U}} \rangle_{1212} \langle \Psi_{\mathcal{U}}|) + \frac{1}{2} (u + v) (\mathbb{1} + \mathcal{U})^{\otimes 2}.$$

Der Beitrag von σ_Q^2 verschwindet, da $\text{tr}_S [\rho_S T_A^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_B] = \text{tr}_S [\rho_S T_B^\dagger \hat{P}_S^{(+)} T_A]$. Der Ausdruck (4.24d) gibt uns sogleich die Spektraldarstellung, die wir zur Analyse benötigen. Aus ihm geht hervor, dass $\hat{O}_{12}^{(+)}$ die Summe von Projektoren auf zwei orthogonale Unterräume ist: Mit dem zweifach entarteten Eigenwert u wird auf die *separable* inkohärente Summe der beiden orthonormalen, maximal verschränkten Zustände $|\Psi_- \rangle_{12}$ und $|\Psi_{\mathcal{U}} \rangle_{12}$ projiziert. Somit unterscheidet $\hat{O}_{12}^{(+)}$ nicht zwischen dem Singulett- und dem via \mathcal{U}_1 unitär äquivalenten Zustand. Bei $\frac{1}{4}(\mathbb{1} + \mathcal{U})^{\otimes 2}$ handelt es sich derweil um den Projektor auf den *Produktzustand* $|\psi \rangle_1 |\psi \rangle_2$, wobei $|\psi \rangle \langle \psi| = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \mathcal{U})$. Der zugehörige Eigenwert lautet $2(u + v)$. Man zeigt leicht, dass dieser separable Eigenzustand ebenfalls orthonormal zu den beiden anderen ist. Da die zwei auftretenden Projektoren unverschränkt sind, vermag die Observable kein Zeuge zu sein, sodass dieses Subensemble als irrelevant verworfen werden muss.

4.3.2. *Stattdessen soll die Auslese bezüglich des Eigenzustands $\hat{P}_S^{(-)}$ zum Eigenwert -1 erfolgen.* Die auf dem Zielsubsystem operierende Observable $\hat{O}_{12}^{(-)}$ ist

$$(4.25) \quad \hat{O}_{12}^{(-)} = u \mathbb{1} + \frac{v}{2} (W_- - W_U) - \frac{u}{2} (\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2) - w \hat{\mathbf{n}}' \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2)$$

Der vergleichende Blick zu Gl. (4.24c) ist an dieser Stelle ausdrücklich erwünscht: Statt der inkohärenten Summe von $|\Psi_- \rangle_{12}$ und $|\Psi_{\mathcal{U}} \rangle_{12}$ enthält Gl. (4.25) nun deren Differenz, denn $W_- - W_U = 2(|\Psi_{\mathcal{U}} \rangle_{1212} \langle \Psi_{\mathcal{U}}| - |\Psi_- \rangle_{1212} \langle \Psi_-|)$. Durch die Wahl $u = w = 0$, $v = 1$ wollen wir uns auf diesen Term beschränken. Mit $\text{tr}_S [\rho_S (T_A^\dagger \hat{P}_S^{(-)} T_A + T_B^\dagger \hat{P}_S^{(-)} T_B)] = \mathbb{1} - \frac{1}{2}(\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2)$ führt Gl. (4.25) zum Ausdruck

$$(4.26) \quad \langle \hat{O}_Q \rangle_{\rho_Q^{(-)}} = \frac{{}_{12} \langle \Psi_{\mathcal{U}} | \rho_{12} | \Psi_{\mathcal{U}} \rangle_{12} - {}_{12} \langle \Psi_- | \rho_{12} | \Psi_- \rangle_{12}}{1 - \frac{1}{2} \langle \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \rangle_{\rho_{12}}}.$$

für den Erwartungswert der Quantenobservablen.

Wir überlegen uns nun, ob mittels $\hat{O}_{12}^{(-)}$ Verschränkung detektiert werden kann. Der maximale Überlapp von $|\psi \rangle_{12}$ und $U |\Phi_+ \rangle_{12}$ für beliebige lokale U und Produktzustände $|\psi \rangle_{12}$ wurde bereits mit $\frac{1}{2}$ identifiziert. Naturgemäß schließt dies die Zustände $|\Psi_- \rangle_{12}$ und $|\Psi_{\mathcal{U}} \rangle_{12}$ ein. Zunächst haben wir also

$$(4.27) \quad -\frac{1}{2} \leq {}_{12} \langle \psi | \hat{O}_{12}^{(-)} | \psi \rangle_{12} = |{}_{12} \langle \psi | \Psi_{\mathcal{U}} \rangle_{12}|^2 - |{}_{12} \langle \psi | \Psi_- \rangle_{12}|^2 = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{p}}_1 \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{n}}' \circ \hat{\mathbf{n}}') \cdot \hat{\mathbf{p}}_2 \leq \frac{1}{2}.$$

Offenkundig werden die Schranken angenommen und die Menge der separablen Zustände wird zwischen den Ebenen $\{\rho_{12} | \langle \hat{O}_{12}^{(-)} \rangle_{\rho_{12}} = \pm \frac{1}{2}\}$ eingeschlossen: $\hat{O}_{12}^{(-)}$ detektiert simultan den Singulett-Zustand $|\Psi_- \rangle_{12}$ wie auch den Zustand $|\Psi_{\mathcal{U}} \rangle_{12}$, beispielsweise also einen der drei anderen paarweise orthogonalen Bellzustände $|\Phi_- \rangle_{12} = -\sigma_1^1 |\Psi_- \rangle_{12}$, $i |\Phi_+ \rangle_{12} = \sigma_1^2 |\Psi_- \rangle_{12}$ oder $|\Psi_+ \rangle_{12} = \sigma_1^3 |\Psi_- \rangle_{12}$. Leider konnte keine Konfiguration $\hat{O}_Q = u \sigma_Q^0 + v \sigma_Q^1 + w \sigma_Q^2$ gefunden werden, für die es einen charakteristischen Vorzeichenwechsel gegeben hätte.

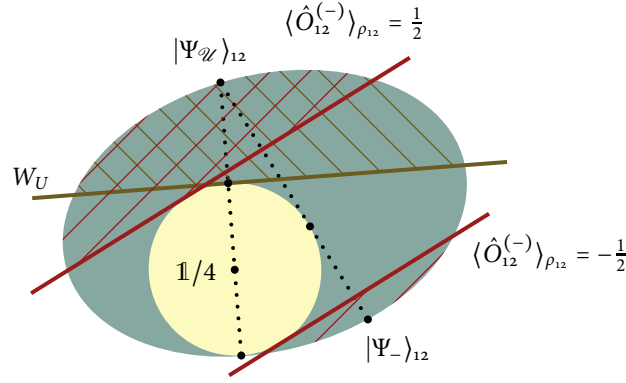


ABBILDUNG 4.4. Skizzenhafter Schnitt durch den Operatorvektorraum zur Veranschaulichung des Detektionsbereichs der effektiven Observablen $\hat{O}_{12}^{(-)}$. Die Farbe \blacksquare steht dabei für die verschränkten, \blacksquare hingegen für die separablen Zustände. Auf den beiden gepunkteten Linien liegen die Zustände der Beispielüberblendungen $\tilde{\rho}_{12}$ und $\bar{\rho}_{12}$ aus Gl. (4.28) bzw. (4.30). Außerdem ist der bezüglich $\bar{\rho}_{12}$ optimale Verschränkungszeuge W_U mit schraffiertem Detektionsbereich eingezeichnet, den wir ursprünglich realisieren wollten und in Gl. (4.22b) erhielten. Einerseits lassen sich mit Hilfe der Observablen $\hat{O}_{12}^{(-)}$ verschränkte Zustände detektieren, die W_U nicht detektiert, und andererseits ist mit W_U eine Bezeugung von Verschränkung in Bereichen möglich, in denen $\hat{O}_{12}^{(-)}$ blind ist. Sehr gut deutlich wird hier auch, wie \mathcal{S} durch die charakteristischen Ebenen $\{\rho_{12} | \langle \hat{O}_{12}^{(-)} \rangle_{\rho_{12}} = \pm \frac{1}{2}\}$ eingeschnürt wird.

Um das gewonnene Bild der Observable $\hat{O}_{12}^{(-)}$ zu schärfen, wollen wir zum Test die Erwartungswerte einiger Beispielzustände ausrechnen. Wir beginnen mit der Überblendung

$$(4.28) \quad \tilde{\rho}_{12}(p) = p|\Psi_{-}\rangle_{1212}\langle\Psi_{-}| + (1-p)|\Psi_{\mathcal{U}}\rangle_{1212}\langle\Psi_{\mathcal{U}}|,$$

wobei für den Parameter p Werte zwischen 0 und 1 erlaubt sind. Die Mischung $\tilde{\rho}_{12}$ ist verschränkt für alle $p \neq \frac{1}{2}$ und erreicht augenscheinlich maximale Verschränkung für $p = 0$ und $p = 1$. Die gleichgewichtete inkohärente Mischung ($p = \frac{1}{2}$) identifizierten wir im Übrigen bereits im letzten Unterabschnitt als separabel⁸. In Abb. 4.4 ist $\tilde{\rho}_{12}(p)$ als gepunktete Verbindungslinie zwischen $|\Psi_{\mathcal{U}}\rangle_{12}$ und $|\Psi_{-}\rangle_{12}$ gezeigt. Am Berührungspunkt mit \mathcal{S} ist p selbstverständlich gleich $\frac{1}{2}$. Der Erwartungswert der Observable $\hat{O}_{12}^{(-)}$ beträgt

$$(4.29) \quad \langle \hat{O}_{12}^{(-)} \rangle_{\tilde{\rho}_{12}} = 1 - 2p$$

und liegt damit im blinden Intervall $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ für $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{3}{4}$. Aus der Illustration wird deutlich, welche Zustände man nicht mittels $\hat{O}_{12}^{(-)}$ als verschränkt identifizieren kann.

Als zweites Beispiel wählen wir die linearen Überblendungen mit $\mathbb{1}/4$ der Art

$$(4.30) \quad \bar{\rho}_{12}(p) = \frac{1}{3}p\mathbb{1} + (1 - \frac{4}{3}p)|\Psi_{\mathcal{U}}\rangle_{1212}\langle\Psi_{\mathcal{U}}|,$$

⁸Die Concurrence beträgt $\mathcal{C}(\tilde{\rho}_{12}) = |2p - 1|$. Was wiederum die Concurrence ist, wird in Anhang A erklärt.

wobei wieder $0 \leq p \leq 1$ ⁹. Für diese erhalten wir

$$(4.31) \quad \langle \hat{O}_{12}^{(-)} \rangle_{\bar{\rho}_{12}} = 1 - \frac{4}{3}p = \begin{cases} 1, & p = 0 \\ 1/3, & p = 1/2 \\ 0, & p = 3/4, \text{ d.h. } \rho_{12} = \mathbb{1}/4 \\ -1/3, & p = 1 \end{cases}$$

und folglich verläuft die Überblendungsstrecke $\{\rho_{12} | \rho_{12} = \bar{\rho}_{12}, 0 \leq p \leq 1\}$ nicht senkrecht zur charakteristische Ebene $\{\rho_{12} | \langle \hat{O}_{12}^{(-)} \rangle_{\rho_{12}} = \frac{1}{2}\}$, wohingegen dies für W_U , dem optimalen Verschränkungszeugen bezüglich $\bar{\rho}_{12}$, der Fall gewesen wäre. Auch diese Feststellung ist in Abb. 4.4 veranschaulicht.

Überprüfen wir nun abschließend den Nutzen von $\hat{O}_{12}^{(-)}$. Eine nicht verschwindende absolute Detektionsintensität und ferner ein auswertbares Interferenzmuster können im selektierten Subensemble $k = -1$ nur vorliegen, wenn der statistische Operator des Markersubsystems 12 zu Beginn die Bedingung

$$(4.32) \quad \langle \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \rangle_{\rho_{12}} \neq 2$$

erfüllt, siehe (4.26). Andernfalls liegt der finale Elektronzustand in einem orthogonalen Unterraum beziehungsweise der gewünschte Prozess findet schlicht nicht statt und kann daher mitnichten selektiert werden. Der Nenner in (4.26) beeinträchtigt unglücklicherweise auch den Charme unseres Ergebnisses: Wir müssen uns ins Gedächtnis rufen, dass nicht $\langle \hat{O}_{12}^{(-)} \rangle_{\rho_{12}}$, sondern $\langle \hat{O}_Q \rangle_{\rho_Q^{(-)}}$ diejenige Messgröße ist, die aus der Detektionsintensität $p^{(-)}(\phi)$ gewonnen wird. Während bei Vorliegen eines charakteristischen Vorzeichenwechsels – beispielsweise im Fall der W_- -Konfiguration $\rho_S = \mathbb{1}/2$, $\hat{O}_{12} = \mathbb{1}$ – die Erwartungswerte von \hat{O}_{12} und \hat{O}_Q unabhängig vom tatsächlichen Wert der Ensemblewahrscheinlichkeit die gleiche Aussagekraft bieten, reduziert der Fund

$$(4.33) \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{2} \langle \psi | \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 | \psi \rangle_{12} = 1 - \frac{1}{2} (\hat{\boldsymbol{p}}_1 + \hat{\boldsymbol{p}}_2) \cdot \hat{\boldsymbol{n}}' \leq 2$$

den Wert der effektiven Witness $\frac{1}{2}(W_- - W_U)$: Separable und verschränkte Zustände des Zielsubsystems vermag $\langle \hat{O}_Q \rangle_{\rho_Q^{(-)}}$ mit $\hat{O}_Q = \sigma_Q^1$ nicht zu trennen. Man zeigt leicht, dass in beiden Fällen der Interferenzbeitrag $\mathcal{V} \cos \alpha$ bei Phasenverschiebung $\phi = 0$ beliebige Werte von -1 bis 1 annehmen kann.

Als Lösung käme nur ein Verfahren in Betracht, dass die Ensemblewahrscheinlichkeit zu rekonstruieren vermag, um ihren störenden Einfluss zu beseitigen. Diese besagt schließlich, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\langle \hat{P}_S^{(-)} \rangle_{\rho_S} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \langle \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 \rangle_{\rho_{12}}$ der Zustand des Sondenelektrons durch die projektive Messung auf $\frac{1}{2}(\mathbb{1} - \mathcal{U})$ reduziert wird.

SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die Suche nach Verschränkungszeugen in unserem mesoskopischen System bestehend aus einem ballistischen Elektron und zwei in einem Aharonov-Bohm-Ring eingebetteten Spin- $\frac{1}{2}$ -Störstellen ergab problemlos zunächst den Zeugen W_- . Mit diesem können verschränkte Quantenzustände nachgewiesen werden, die einen genügend großen Überlapp mit dem maximal verschränkten, total antisymmetrischen Singulettzustand haben. Ferner konnten die Sensitivität des Interferometers auf Verschränkung im Detail verstanden und die Resultate von Loss u. Sukhorukov (2000) bestätigt werden. Bemerkenswert ist, dass die einfachste Konfiguration – nämlich mit einem unpolarisierten Probenelektron $\rho_S = \mathbb{1}/2$ und nichtselektiver Analyse $\hat{O}_S = \mathbb{1}$ – bereits W_- realisiert.

⁹Die Überblendung $\bar{\rho}_{12}$ in (4.30) ist separabel für $p \geq \frac{1}{2}$, verschränkt für $p < \frac{1}{2}$ und wäre für $\mathcal{U} = \mathbb{1}$ der im Anhang A diskutierte Wernersche Zustand bipartiter Qubitquantensysteme, (Werner 1989).

Mit Kompromissen können im Rahmen der Theorie darüber hinaus viele, zum Singulettzustand durch lokale unitäre Transformationen $\mathcal{U}_1 = \hat{n}' \cdot \sigma$, äquivalente Zustände $|\Psi_{\mathcal{U}}\rangle_{12}$ ohne Anpassung der Wechselwirkung nachgewiesen werden: Die Implementierung des zugehörigen Verschränkungszeugen W_U ist möglich, wenngleich sein Erwartungswert leider nicht direkt aus der interferometrischen Detektionswahrscheinlichkeit $p'(\phi)$ bestimmbar ist. Interessante Ergebnisse lieferte auch die Betrachtung von-Neumannscher Messungen und die Sortierung in Subensembles, wobei sich die Observable $\hat{O}_{12}^{(-)}$ als besonders vielversprechend zeigte. Mit ihr können simultan der Singulett- wie auch ein weiterer, zu $|\Psi_{-}\rangle_{12}$ orthogonaler maximal verschränkter Zustand $|\Psi_{\mathcal{U}}\rangle_{12}$ aufgespürt werden. Dies lässt den Schluss zu, dass im vorliegenden Szenario prinzipiell fast alle verschränkten Zustände interferometrisch detektiert werden können. Je nachdem, wie viele selbst auferlegte Forderungen man fallen lässt, ergeben sich mehr oder weniger Möglichkeiten. Der charakteristische Vorzeichenwechsel ist ein Beispiel einer solchen Forderung.

Zum Abschluss dieses Kapitels verfolgen wir Gedanken zur Durchführbarkeit unseres Vorschlags. In Ref. (Loss u. Sukhorukov 2000) wird eine Kopplung der Quantenpunkte diskutiert: Das Tunneln von Elektronen zwischen den Punkten resultiert je nach Einstellung der Kopplungsstärke in einem Singulett- oder Tripletzustand als Grundzustand des Systems. Die Tunnelrate von Elektronen zu und von den speisenden Elektronenreservoirs wird so eingestellt, dass das System zwischen zwei Tunnelereignissen in den Grundzustand relaxiert. Eine fortlaufende, aufwändige Präparation des verschränkten Zustands, wie sie sonst zur Beobachtung der Aharonov-Bohm-Oszillationen nötig wäre, entfällt. Wir klammerten bisher die Frage aus, ob das hier vorgeschlagene Messprotokoll praktikabel sei: Einerseits erfordert jede Wechselwirkung erneute Präparation sowohl von Elektron als auch Störstellen und andererseits ist nicht klar, ob sich mit verfügbarer Spintronik der Spin genügend exakt beherrschen lässt¹⁰. Würde man an experimentelle Realisation denken, müsste man daher mögliche Fehler abschätzen.

¹⁰Ref. (Braun u. a. 2004) beschreibt theoretisch das Quantenpunkt-Spinventil, ein noch nicht experimentell realisiertes, mesoskopisches, spintronisches Bauelement.

Die Streuung an Atomen

In einem zweiten Ansatz untersuchen wir die Interferenz von Laserlicht niedriger Intensität, d.h. konkret von einem einzelnen, als Sonde dienenden Photon, welches von zwei in engen Fallen platzierten Atomen gestreut wird. Dabei soll jedes Atom über resonante Dipolübergänge zwischen jeweils zweifach entarteten Grund- und angeregten Zuständen wechselwirken. Da letztere nur während des Streuprozesses in Erscheinung treten und uns nur der Langzeitlims der Wechselwirkung interessiert, bilden die (entarteten Grundzustände beider) Atome ein effektives Paar von Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen, ein bipartites Qubitsystem also, in welchem es im Folgenden Verschränkung zu detektieren gilt, Abb. 5.1.

Bis hierhin gleicht die beschriebene Situation den Experimenten von Eichmann u. a. (1993), die sich in ihren Veröffentlichungen ganz der Quantendualität verschrieben und studierten (Itano u. a. 1998), wie der Youngsche Interferenzkontrast verschwand, wenn Pfadinformationen in den atomaren Grundzuständen zweier $^{198}\text{Hg}^+$ -Ionen vorlagen. Tatsächlich wurden damals nur separable Zustände präpariert, die möglichen Einflüsse von Verschränkung auf das Interferenzbild waren nicht Gegenstand der Forschung. An diesem Punkt gehen wir über deren Studie hinaus und verwenden im besonderen die Interferenzfigur, um mit der besprochenen Methode Verschränkung zwischen den Atomen zu erkennen.

Da wir uns allein auf den Einfluss der internen Besetzung der Atome konzentrieren wollen, nehmen wir an, dass die Falle sie so steif festhält, dass ihre Schwerpunktsfreiheitsgrade vollständig ausgefroren sind. Demzufolge können sie keine Pfadinformationen speichern, wie es andernfalls durch den atomaren Rückstoß der Fall wäre (Wickles u. Müller

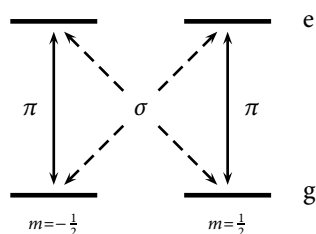


ABBILDUNG 5.1. Interne Struktur eines der beiden Vierniveaumatome. Bei der Streuung eines Photons gibt es zwei mögliche Arten von Prozessen, nämlich solche, die die magnetische Quantenzahl erhalten und andere, bei denen sie sich beim Übergang zwischen Grund- und angeregtem Zustand ändert. Die Prozesse erster Gattung nennt man π -Übergänge, koppeln im obigen Bild senkrecht und sind durchgezogen dargestellt, —. Letztere koppeln hingegen gekreuzt und sind unter der Bezeichnung σ -Übergänge bekannt, — —. Wenn das Atom das einfallende Licht streut, werden sich entweder die Anfangs- und Endgrundzustandskonfiguration nicht unterscheiden – dies nennt man Rayleighübergang – oder es kommt zum entarteten elastischen Ramanübergang, bei dem sich die magnetische Quantenzahl ändert.

2006)¹. Gleichzeitig soll die Wellenlänge des einfallenden Photons sehr viel größer sein als der Bohrsche Atomradius, was die Beschreibung der beiden Atome als ideale Punktstreuer in Dipolnäherung legitimiert. Durch genügend große Wahl des Abstandes $r_{21} = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ können Wechselwirkungen zwischen den Atomen minimiert werden, wir gehen insbesondere davon aus, dass er stets beträchtlich größer als die Photonwellenlänge ist, $kr_{21} \gg 1$. Letztere wird so gewählt, dass nur diejenigen Dipolübergänge relevant sind, deren Bohrfrequenz gerade $\hbar\omega_0$, den energetischen Abstand der gewünschten jeweils zweifach entarteten Grund- und angeregten Niveaus, beträgt. Damit es zur gesuchten quasiresonanten Streuung kommt, muss also die Verstimmung $\omega - \omega_0$ sehr viel kleiner sowohl als die inverse Lebenszeit $1/\Gamma$ des angeregten Zustands als auch der Abstand zu etwaigen unerwünschten benachbarten Zuständen sein. Schließlich muss noch durch Senken der Laserintensität gewährleistet werden, dass nur ein einzelnes Photon mit den Atomen wechselwirkt.

1. Die Wechselwirkung zwischen Photon und Atom

In diesem Abschnitt werden wir ein theoretisches Gerüst zur Behandlung des resonanten Dipolübergangs kennenlernen. Dies bedeutet zunächst, sich mit dem ungestörten Hamiltonoperator H_0 sowie den Wechselwirkungstermen zu beschäftigen, um zuletzt über die Resolvente die Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen Eigenzuständen von H_0 berechnen zu können. Es handelt sich um die Wiederholung bekannter Methoden (Cohen-Tannoudji u. a. 1998) und Konzepte (z.B. Müller u. Miniatura 2002, Abschnitt 2), deren unmittelbares Verständnis für die Fragestellungen dieser Arbeit nicht erforderlich ist. Es liegt daher nahe, sich zunächst den ab Seite 42 folgenden Abschnitten zuzuwenden und erst bei Bedarf zurückzukehren.

Wie in Aussicht gestellt beginnen wir mit dem Hamiltonoperator H_0 des ungestörten Systems, den wir als Summe $H_0 = H_A + H_R$ des Hamiltonians

$$(5.1) \quad H_A = \hbar\omega_0 \sum_{\alpha=1}^2 P_{\epsilon}^{\alpha}$$

und des Beitrages des freien Feldes

$$(5.2) \quad H_R = \hbar \sum_{\mathbf{k}\hat{\epsilon}} \omega_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\hat{\epsilon}}^{\dagger} a_{\mathbf{k}\hat{\epsilon}}$$

eingeführen. Der erstgenannte Anteil berücksichtigt allein die interne Struktur der Atome und besteht im Wesentlichen aus Projektoren

$$(5.3) \quad P_{\epsilon}^{\alpha} = \sum_{m_{\epsilon}=-J_{\epsilon}}^{J_{\epsilon}} |J_{\epsilon} m_{\epsilon}\rangle_{\alpha\alpha} \langle J_{\epsilon} m_{\epsilon}| = (2J_{\epsilon} + 1) \mathbf{d}_{\text{eg}}^{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\text{ge}}^{\alpha} = 2 \mathbf{d}_{\text{eg}}^{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\text{ge}}^{\alpha}$$

auf das Multiplett der angeregten Niveaus des Atoms α und trägt offensichtlich dem Umstand Rechnung, dass bei der Anregung eines Atoms die Energie $\hbar\omega_0$ investiert werden muss². Bei den $\mathbf{d}_{\text{eg}}^{\alpha}$ ($\mathbf{d}_{\text{ge}}^{\alpha}$) handelt es sich um die irreduziblen Dipolübergangstensoroperatoren erster Stufe zwischen Grund- und angeregtem (angeregtem und Grund-) Zustand. Entwickelt in der sphärischen Basis $\hat{\mathbf{e}}_q$, $q = -1, 0, 1$, lauten sie

$$(5.4a) \quad \mathbf{d}_{\text{eg}}^{\alpha} = \sum_{q=-1}^1 d_{\text{eg}}^{\alpha}(q) \hat{\mathbf{e}}_q^*, \quad \mathbf{d}_{\text{ge}}^{\alpha} = \mathbf{d}_{\text{eg}}^{\alpha\dagger} = \sum_{q=-1}^1 d_{\text{ge}}^{\alpha}(q) \hat{\mathbf{e}}_q^*$$

¹Wobei noch im Detail zu klären wäre, ob der dynamische Zusammenbruch der Interferenz verursacht durch thermische Freiheitsgrade in der Falle überhaupt Auswirkungen auf das Verschränkungskriterium hat, siehe Abb. 3.3 auf Seite 22. Vorausgesetzt, der verschränkte Zustand wird nicht durch thermische Anregung a priori gestört, sollte sich durch die Badwechselwirkung keine zusätzliche Phase α ergeben.

²Der Projektor auf die Grundzustände lautet derweil $P_{\text{g}}^{\alpha} = \sum_{m_{\text{g}}=-J_{\text{g}}}^{J_{\text{g}}} |J_{\text{g}} m_{\text{g}}\rangle_{\alpha\alpha} \langle J_{\text{g}} m_{\text{g}}| = (2J_{\text{g}} + 1) \mathbf{d}_{\text{ge}}^{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\text{eg}}^{\alpha} = 2 \mathbf{d}_{\text{ge}}^{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\text{eg}}^{\alpha}$.

mit Koeffizienten – hier zur Vollständigkeit in allgemeinsten Fassung –

$$(5.4b) \quad d_{eg}^\alpha(q) = \sum_{m_g m_e} \frac{\langle J_g m_g, 1q | J_e m_e \rangle}{\sqrt{2J_g+1}} |J_e m_e\rangle_{\alpha\alpha} \langle J_g m_g|$$

$$(5.4c) \quad = \sum_{m_g m_e} (-1)^{1-J_g-m_e} \begin{pmatrix} J_g & 1 & J_e \\ m_g & q & -m_e \end{pmatrix} |J_e m_e\rangle_{\alpha\alpha} \langle J_g m_g|$$

respektive

$$(5.4d) \quad d_{ge}^\alpha(q) = (-1)^{J_e-J_g} \sum_{m_g m_e} \frac{\langle J_e m_e, 1q | J_g m_g \rangle}{\sqrt{2J_g+1}} |J_g m_g\rangle_{\alpha\alpha} \langle J_e m_e|$$

$$(5.4e) \quad = \sum_{m_g m_e} (-1)^{1-J_g-m_g} \begin{pmatrix} J_g & 1 & J_e \\ m_g & -q & -m_e \end{pmatrix} |J_g m_g\rangle_{\alpha\alpha} \langle J_e m_e|.$$

In den obigen, sich aus der Anwendung des Wigner-Eckart-Theorems (Edmonds 1996) ergebenden Darstellungen wird von den Clebsch-Gordan-Koeffizienten wie auch, in der alternativen Formulierung, dem Wigner-3j-Symbol Gebrauch gemacht. Zusammen bilden die Übergangsoperatoren den Dipolmomentoperator $\hat{\mu}^\alpha$, es gilt

$$(5.5) \quad \hat{\mu}^\alpha = \langle J_e || \hat{\mu} || J_g \rangle (d_{eg}^\alpha + d_{ge}^\alpha),$$

wobei $d_{eg} = \langle J_e || \hat{\mu} || J_g \rangle$ dessen reduziertes Matrixelement ist und experimentell festgestellt werden kann. Dessen genauer Betrag ist für das weitere Vorgehen jedoch unwichtig.

Die Summation im Feldhamiltonian (5.2) erfolgt sowohl über alle Feldmoden \mathbf{k} , die im Quantisierungsvolumen L^3 enthalten sind als auch über die beiden möglichen transversalen Polarisation $\hat{\mathbf{e}} = \hat{\mathbf{e}}(\mathbf{k})$, die mit \mathbf{k} ein orthogonales Dreibein bilden. Die Operatoren $a_{\mathbf{k}\hat{\mathbf{e}}}^{(\dagger)}$ erfüllen die bosonische Vertauschungsrelationen $[a_{\mathbf{k}'\hat{\mathbf{e}}'}, a_{\mathbf{k}\hat{\mathbf{e}}}^\dagger] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\hat{\mathbf{e}}\hat{\mathbf{e}}'}$, $[a_{\mathbf{k}'\hat{\mathbf{e}}'}, a_{\mathbf{k}\hat{\mathbf{e}}}^{(\dagger)}] = 0$, wobei $a_{\mathbf{k}\hat{\mathbf{e}}}^\dagger$ aus dem Vakuumzustand $|0\rangle$ den Fockzustand $|\mathbf{k}\hat{\mathbf{e}}\rangle$ eines einzelnen Photons mit Wellenvektor \mathbf{k} und Polarisation $\hat{\mathbf{e}}$ erzeugt, während $a_{\mathbf{k}\hat{\mathbf{e}}}$ ihn wieder zu vernichten vermag.

Die Beschreibung der Wechselwirkung zwischen Atomen und Photonen erfolgt in Dipolnäherung und Göppert-Mayer-Eichung³: H_0 wird um

$$(5.6) \quad V_{AR} = \hbar \sum_{\alpha} \sum_{\mathbf{k}\hat{\mathbf{e}}} g_{\omega_{\mathbf{k}}} (i a_{\mathbf{k}\hat{\mathbf{e}}} (d_{eg}^\alpha + d_{ge}^\alpha) \cdot \hat{\mathbf{e}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_\alpha} + \text{h.c.})$$

zu $H = H_A + H_R + V_{AR}$ ergänzt, wobei

$$(5.7) \quad g_{\omega_{\mathbf{k}}} = \frac{1}{\hbar} \langle J_e || \hat{\mu} || J_g \rangle \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\mathbf{k}}}{2\varepsilon_0 L^3}} = \frac{1}{\hbar} d_{eg} \mathcal{E}_{\omega_{\mathbf{k}}}$$

Rabifrequenzen für die Vakuumfelder definiert. (5.6) beschreibt die Kopplung von Vakuummoden und Dipolmomenten der Atome und deckt hier zunächst resonante und – im gleichen Maß – antiresonante Prozesse ab. Nahe der Resonanz können wir aber auf die *Rotating Wave Approximation* (Cohen-Tannoudji u. a. 1998) zurückgreifen und uns auf die resonanten Terme beschränken. Zudem kann hier das quantisierte elektrische Feld an den Schwerpunktskoordinaten \mathbf{r}_α der Atome ausgewertet werden, da wir sie als Punktstreuer approximieren. Des Weiteren wird die Quantisierungsachse im Folgenden parallel zur Richtung des einfallenden Lichts, \mathbf{k} , gewählt, für welche wir wiederum die positive $\hat{\mathbf{z}}$ -Richtung vorgeben.

Um die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die elastischen Übergänge vom Anfangszustand $|i\rangle = |\{m\}, k\hat{\mathbf{e}}\rangle$ zum Endzustand $|f\rangle = |\{m'\}, k'\hat{\mathbf{e}}'\rangle$ für den Fall zu Unendlich tendierender Wechselwirkungszeit T spezifizieren zu können, muss das Matrixelement

$$(5.8) \quad \mathcal{S}_{fi} = \langle f | \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{U}(T/2, -T/2) | i \rangle = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(\omega' - \omega) \mathcal{T}_{fi} / \hbar$$

³In dieser Eichung weicht der kanonische nicht wesentlich vom kinetischen Impulsoperator ab. Sie ist die relativistische Verallgemeinerung der Längeneichung, bei der die beiden Operatoren identisch sind, und kann auf ebene Wellen angewandt werden, (Cohen-Tannoudji u. a. 1997).

des Streuoperators \mathcal{S} ausgewertet werden. \tilde{U} bezeichnet an dieser Stelle den Zeitentwicklungsoperator U im Dirac- respektive Wechselwirkungsbild bezüglich V . Der diagonale Term δ_{fi} berücksichtigt den ungestreuten Anteil, während das Diracsche δ die Energieerhaltung des Prozesses gewährleistet. Wir sehen hieran, dass \mathcal{S} , der Übergangsoperator, für sich allein genommen im Allgemeinen weder unitär noch spurerhaltend ist. Dessen Matrixelement liegt wiederum als

$$(5.9) \quad \mathcal{T}_{fi} = \langle f|V + VG(\hbar\omega + i\eta)V|i\rangle$$

verständlicherweise mit Abhängigkeit vom Wechselwirkungspotential V vor, wobei sich die Retardierung der als Fouriertransformierte des Zeitentwicklungsoperators

$$(5.10) \quad U(T/2, -T/2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iET/\hbar} \lim_{\eta \downarrow 0} G(E + i\eta) dE$$

gegebenen Resolvente G im infinitesimal positiven Parameter η ausdrückt. G ist unterdessen als Bornsche Reihe

$$(5.11) \quad G(z) = G_0(z) + G_0(z)VG_0(z) + G_0(z)VG_0(z)VG_0(z) + \dots$$

mit der Resolvente $G_0(z) = (z - H_0)^{-1}$ des ungestörten Hamiltonians gegeben. In dieser Reihe sind nur diejenigen Summanden für uns von Belang, die in einem physikalischen Prozess von $|i\rangle$ zu $|f\rangle$ vermitteln.

2. Einfachstreuung

Zunächst werden wir die Einfachstreuung des Eichmann-Experiments studieren, die – bei für beide Atome gleichem effektiven Wirkungsquerschnitt – ein symmetrisches Young-Interferometer realisiert, Abb. 5.2. (i) Die Alternative A kennzeichnet den Fall, in dem das Photon mit dem ersten Atom streut, während auf Weg B das Atom 2 besucht wird. Der Abstand der beiden Atome muss so angepasst werden, dass Streuordnungen höher als die Einzelstreuung sehr unwahrscheinlich werden. Damit wird der Transfer von Wahrscheinlichkeiten zwischen den Pfaden durch Austausch virtueller Photonen bei Dipol-Dipol-Wechselwirkung in sehr guter Näherung ausgeschlossen, was eine Voraussetzung des in Kapitel 3 entwickelten Rahmenwerks war.

Bevor wir die Auswirkungen von Verschränkung in diesem System erforschen können, bedarf es einiger Ausführungen handwerklicher Natur. Der nun folgende Unterabschnitt 2.1 stellt eine Fortsetzung des technischen Paragraphen 1 dar. In ihm werden wir die Übergangsoperatoren T_A und T_B für die Einzelstreuung ermitteln. Daran anschließend soll die geometrische Beschreibung der Anordnung festgelegt werden. Erst danach in Abschnitt 2.3 ab Seite 45 wird uns klar werden, warum es sich lohnt, dieses quantenoptische Szenario im Hinblick auf die Implementierung von Verschränkungszeugen zu untersuchen.

2.1. Wie lauten die pfadkonditionierten Streuoperatoren? Äquivalent ist die Frage nach dem Übergangsoperator für die Streuung eines Photons an einem einzigen Atom am Ort \mathbf{r} . Zur Beantwortung richten wir unseren Blick auf ein ganz bestimmtes Matrixelement des in Unterabschnitt 1 behandelten Streuoperators \mathcal{S} , nämlich $\langle f|VG_0V|i\rangle$ – dies entspricht \mathcal{T}_{fi} bei alleiniger Berücksichtigung des ersten Summanden der Bornreihe (5.11). Nach Summieren über alle virtuell angeregten Zwischenzustände und Ausintegrieren der Feldmoden findet man

$$(5.12) \quad \langle f|VG_0V|i\rangle = \frac{\hbar^2 g_\omega^2}{\hbar(\omega - \omega_0) + i\Gamma/2} e^{i(k-k')\cdot\mathbf{r}} \langle m'|(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'^* \cdot \mathbf{d}_{ge})(\mathbf{d}_{eg} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}})|m\rangle,$$

wobei im Zähler des ersten Vorfaktors die quadrierte Rabi-Frequenz und in dessen resonantem Nenner die Verstimmung von der Lamb-verschobenen Übergangsfrequenz ω_0 als auch die um ω_0 zentrierte natürliche Linienbreite des angeregten Zustands auftauchen. Der sich

anschließende Exponentialfaktor berücksichtigt die geometrieinduzierte Phasenverschiebung. Die im Übergangsmatrixelement auf der rechten Seite von (5.12) vorkommende Dipoldyade, die nur auf den Spin- $\frac{1}{2}$ -Grundzuständen operiert, vereinfacht sich wegen der mit $J_e = J_g = \frac{1}{2}$ verbundenen Symmetrie erfreulicherweise deutlich, man findet (Miniatura u. a. 2007)

$$(5.13) \quad \mathbf{d}_{\text{ge}} \circ \mathbf{d}_{\text{eg}} = \frac{1}{6} \boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\sigma}.$$

$\boldsymbol{\sigma}$ ist dabei der Vektoroperator der drei Paulischen Spinmatrizen.

(iii) Mit diesem Wissen lassen sich nun sogleich Operatoren $T_{A,B}$ für die Behandlung der Interferenz eines einfach in kohärenter Superposition an zwei Atomen gestreuten Photons definieren. Da wir nur am Endzustand ρ' des Prozesses interessiert sind – siehe Gl. (2.20) auf Seite 13 –, dieser augenscheinlich auf dessen erfolgreiche Realisierung konditioniert ist und wir demzufolge die volle Information über die Wahrscheinlichkeit des Streueignisses, wie sie \mathcal{F}_{fi} bietet, gar nicht benötigen, steht es uns frei, alle Proportionalitätsfaktoren wegzulassen und einfach

$$(5.14) \quad T_{A,B} = T_{A,B}^\dagger = \boldsymbol{\sigma}_{1,2} \circ \boldsymbol{\sigma}_{1,2}$$

zu setzen, Abb. 5.2. Der Index 1,2 ist jeweils die Kennziffer des Atoms, auf dessen Grundzustand die Dipoldyade tätig wird.

2.2. Beschreibung der Streugeometrie. $T_{A,B}$ koppelt im Matrixelement (5.12) an die Polarisationsvektoren $\hat{\mathbf{e}}, \hat{\mathbf{e}}'$ von einlaufendem respektive ausgehendem Photon. Es soll nun diese auf reine Polarisation beschränkte vektorielle Beschreibung durch die allgemeinere Darstellung des Polarisationszustandes mittels der Stokesschen Parameter ersetzt werden (Born u. Wolf 1980)⁴. Dadurch wird eine simple Vereinheitlichung mit dem bisherigen Formalismus für einerseits den Anfangszustand ρ_S der Sonde wie auch andererseits für die Observable \hat{O}_S möglich.

In der Parametrisierung der Polarisation ist die Orientierung des Bezugssystems nicht eindeutig festgelegt. Dies schafft einen Freiheitsgrad, nämlich die Rotation um die Richtung der Propagation, $\hat{\mathbf{k}}$ bzw. $\hat{\mathbf{k}}'$. Von nun an sollen $\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$ und $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ die x - z -Ebene aufspannen; die Ebene der transversalen Polarisation des eingehenden Photons ist, um es noch einmal hervorzuheben, stets die x - y -Ebene, Abb. 5.3. Die Richtung $\hat{\mathbf{k}}'$, in der das ausgehende Photon detektiert wird – dadurch erfolgt selbstverständlich bereits eine Selektion, siehe unten –, soll über die Winkel ϑ und φ als Abweichung von der ursprünglichen Propagationsrichtung ausgedrückt werden, $\hat{\mathbf{k}}' = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$. Das Bezugssystem für die zugehörige Polarisation wird dann durch die Vektoren $\hat{\mathbf{x}}' = (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, -\sin \vartheta)$ und $\hat{\mathbf{y}}' = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$ definiert. Nach diesen einleitenden geometrischen Spezifizierungen können wir den Anfangszustand des Photons angeben, er lautet

$$(5.15) \quad \rho_S = (\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}) \cdot \rho_P \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}^T \\ \hat{\mathbf{y}}^T \end{pmatrix},$$

⁴Oftmals sind sich die Lehrbücher uneinig über die Bezeichnung und Sortierung der Stokesparameter. Vermutlich gab Stokes in etwa die folgende Definition:

$$\mathbf{p} \begin{cases} p_0 \equiv I \equiv S_0 = \langle |E_x|^2 \rangle + \langle |E_y|^2 \rangle, \\ p_1 \equiv U \equiv S_2 \equiv p_y = 2 \operatorname{Re} \langle E_x^* E_y \rangle = I_p \cos(2\chi) \sin(2\psi), \\ p_2 \equiv V \equiv S_3 \equiv p_z = 2 \operatorname{Im} \langle E_x^* E_y \rangle = I_p \sin(2\chi), \\ p_3 \equiv Q \equiv S_1 \equiv p_x = \langle |E_x|^2 \rangle - \langle |E_y|^2 \rangle = I_p \cos(2\chi) \cos(2\psi). \end{cases}$$

I ist die Gesamtintensität und $I_p = I \cdot p = |\mathbf{p}|$, 2ψ sowie 2χ sind sphärische Koordinaten des Polarisationszustandes zum kartesischen dreidimensionalen Raum, der durch die letzten drei Stokesparameter $p_{1,2,3}$ aufgespannt und durch die Poincarésphäre visualisiert wird. Mit $p \in [0;1]$ wird der Anteil des rein polarisierten Lichts beziffert. Die Bezeichnungen S_0, \dots, S_3 oder I, Q, U und V finden ebenso Verwendung.

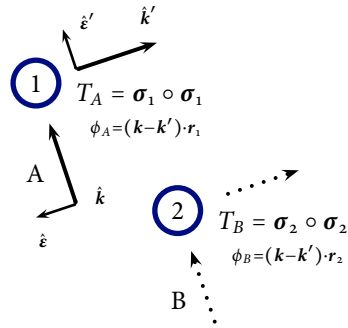


ABBILDUNG 5.2. Pfadalternativen für Youngsche Interferenz bei der Einfachstreuung an den Atomen 1 und 2. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass der Wellenvektor \mathbf{k} des einlaufenden Photons parallel zur \hat{z} -Richtung verläuft. Die Polarisationsvektoren dieses und des ausgehenden Photons sind $\hat{\mathbf{e}}$ und $\hat{\mathbf{e}}'$. Zwischen den Pfaden ergibt sich die geometrieabhängige Phasendifferenz $\phi = \phi_B - \phi_A = (\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_{21}$. Sind also die Richtungen $\hat{\mathbf{k}}$ sowie $\hat{\mathbf{k}}'$ festgelegt, kann ϕ nur durch Drehung von $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ oder Anpassung von kr_{21} manipuliert werden. Experimentell sind beide Varianten nur schwer durchzuführen, man würde demnach eher $\hat{\mathbf{k}}'$, die Richtung der Detektion, leicht variieren.

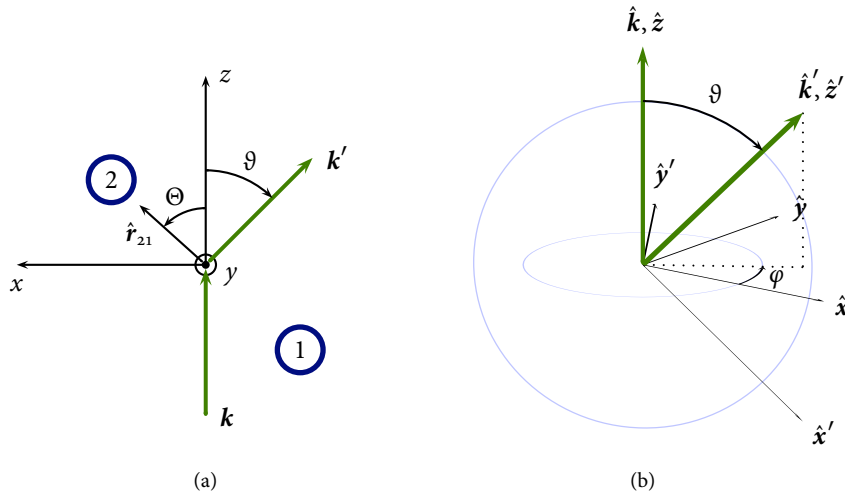


ABBILDUNG 5.3. (a) Auf die von $\hat{\mathbf{k}}$ und $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ aufgespannte x - z -Ebene projizierte Skizze der Streugeometrie. Der Winkel, um den $\hat{\mathbf{k}}'$ in positiver y -Richtung aus der Papierebene herausragt, ist φ und nicht gezeigt. (b) Illustration der Bezugssysteme zur Beschreibung der Polarisation von einlaufendem und ausgehendem Photon. $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{k}}'$ und $\hat{\mathbf{x}}'$ liegen in derselben Ebene, $\hat{\mathbf{y}}'$ ist immer senkrecht zu $\hat{\mathbf{k}}$. Die Darstellungen sind stark an die Zeichnungen in Ref. (Itano u. a. 1998) angelehnt.

wobei wiederum der Qubitzustand

$$(5.16) \quad \rho_P = \frac{1}{2}(\mathbf{1} + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_P)$$

die Polarisation über den Stokesvektor \mathbf{p} mit $p = |\mathbf{p}| \in [0; 1]$ charakterisiert⁵. Die Beziehung (5.15) definiert eine Einbettung des zweidimensionalen Untervektorraums der Polarisation in den \mathbb{R}^3 , in dem die Streuung stattfindet. Für $p = 1$ wird ρ_P rein und demzufolge geht ρ_S in die Dyade $\frac{1}{2} \hat{\mathbf{e}} \circ \hat{\mathbf{e}}^*$ über. Dies geschieht in Übereinstimmung mit (5.12). Im Falle vollkommen unpolarisierten Lichts, $p = 0$, findet man hingegen $\rho_S = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}})$, den Projektor auf die transversale Ebene. Dabei ist $\mathbf{1}$ die 3×3 -Einheitsmatrix. Für die Sondenobservable erhält man analog

$$(5.17) \quad \hat{O}_S = (\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}') \cdot \hat{O}_P \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}'^T \\ \hat{\mathbf{y}}'^T \end{pmatrix} = \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}' \circ \hat{\mathbf{e}}'^*, & \hat{O}_P = \hat{O}_P^2 \neq 0 \\ \mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}', & \hat{O}_P = \mathbf{1}, \end{cases}$$

wobei \hat{O}_P eine beliebige auf dem Qubit-Polarisationsunterraum operierende Observable ist.

2.3. Warum sollte man Verschränkung anhand der Interferenz erkennen können?

Wir wissen bereits, dass in den Endzustand ρ' des Quantensystems neben der Grundzustandskonfiguration der beiden Atome die Richtung und die Polarisation von sowohl einlaufendem als auch ausgehendem Photon eingehen, worauf dann das Ensemble der Prozesse konditioniert ist. Da sich die Endzustände beider Atome im Allgemeinen voneinander unterscheiden, $\rho_{12}^A \neq \rho_{12}^B$, lässt sich im Prinzip zumindest ein Teil der Information über den Pfad des Photons rekonstruieren. Dies wurde abstrakt bereits im Detail erläutert, es liegt aber im Sinne der Fragestellung des vorliegenden Abschnitts, sich insbesondere anhand dieses Systems mit den Begriffen Welcher-Weg-Information, Unterscheidbarkeit der Pfade und Interferenzkontrast erneut vertraut zu machen. Wir werden dies nun durch beispielhafte Betrachtung mehrerer Situationen angehen.

Gehen wir zunächst davon aus, das Photon sei zu Beginn linkszirkular polarisiert, d.h. $|\psi\rangle_P = (|0\rangle_P - i|1\rangle_P)/\sqrt{2}$, und die beiden Atome wären im reinen Zustand $|\psi\rangle_{12} = |01\rangle_{12} \equiv |\leftarrow \rightarrow, \rightarrow \leftarrow\rangle_{12}$. Für das gestreute Photon, d.h. seine Richtung und seine Polarisation, interessieren wir uns an dieser Stelle nicht. Da wir die Einfallrichtung $\hat{\mathbf{z}}$ als Quantisierungsachse verwenden, fällt es uns leicht, anhand der Auswahlregeln als einzig möglichen Übergang die σ^- -Anregung $\leftarrow \rightarrow$ zu erkennen. $\leftarrow \leftarrow$ ist hingegen ein Dunkelzustand, das Atom entgeht der Anregung. Dies bedeutet, dass nur Pfad A mit Atom 1 durchlaufen wird; die Wahrscheinlichkeit für Weg B beträgt aufgrund des verbotenen Übergangs hingegen Null. Dementsprechend wird kein Interferenzmuster beobachtet, $\mathcal{V} = 0$. Da der Experimentator statt durch eine Messung auf dem Markersystem S12 schon allein durch die soeben angestellten Überlegungen den Ursprung des ausgehenden Photons bestimmen kann, ist die Vorhersagbarkeit der realisierten Alternative maximal, es gilt $\mathcal{P} = 1$.

Diskutieren wir nun einen anderen, weniger simplen, aber dafür an Effekten reicheren Fall. Die Polarisation des Photons verändern wir zu $|\psi\rangle_P = |0\rangle_P$, es ist also linear in x -Richtung polarisiert. Bei erneuter Betrachtung von $|\psi\rangle_{12} = |\leftarrow \rightarrow, \rightarrow \leftarrow\rangle_{12}$ fällt auf, dass diesmal beide Atome angeregt werden, denn die lineare Polarisation lässt sich auffassen als gleich gewichtete kohärente Überlagerung von links- und rechtszirkularer Polarisation. Es spielen also die σ -Übergänge $\leftarrow \rightarrow$ und $\rightarrow \leftarrow$ gleichermaßen eine Rolle. Wir setzen den Detektor in Vorwärtsrichtung, also $\hat{\mathbf{k}}' = \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{z}}$. In dieser Konfiguration kann aufgrund der Transversalität kein aus einem π -Übergang $\leftarrow \leftarrow$ oder $\rightarrow \rightarrow$ stammendes Photon beobachtet werden. Alle detektierbaren Lichtquanten entspringen daher σ -artigen Relaxationen und dies bedeutet, dass sich im Subensemble der vorwärtsdetektierten Photonen die Grundzustandskonfiguration beider Atome während der Streuung nicht ändert, $|\psi'\rangle_{12} = |\psi\rangle_{12}$. Aber, da bei den Atomen 1 und 2 Photonen unterschiedlicher Helizität die Übergänge auslösen,

⁵Formal wurde die Intensität $I = 1$ gesetzt.

erreichen absolut unterscheidbare Photonen den Detektor: Von Pfad A stammen linkszirkular polarisierte Photonen, diejenigen von Pfad B sind dagegen rechtszirkular polarisiert. Die Konsequenz ist daher das Verschwinden des Interferenzmusters, denn im Prinzip ließe sich durch eine Messung der Polarisation der Pfad des Photons genau bestimmen. Wir haben $\mathcal{V} = \mathcal{P} = 0$. Es gibt aber eine Möglichkeit, die Pfadinformationen zu tilgen. Dazu schieben wir einen Polarisator zwischen Atome und Detektor, der nur in x -Richtung polarisierte Photonen passieren lässt. Da sich nach einer solchen Projektion ehemals links- nicht mehr von zuvor rechtszirkular polarisiertem Licht unterscheiden lässt, ist somit – abstrakt gesprochen – für das Subensemble, in welchem das Photon die lineare x -Polarisation realisiert, der Interferenzkontrast wiederhergestellt. Mehr noch, man beobachtet maximale konstruktive Interferenz im Zentrum der Interferenzfigur, d.h. für $\phi = 0$. Was passiert, wenn wir jetzt den Polarisator um die z -Achse drehen? Nach einer Drehung um $\pi/2$ projizieren wir auf in y -Richtung linear polarisierte Photonen. Diese sind gerade orthogonal zu den vorherigen. Es stellt sich heraus, dass auch dieser Aufbau als Quantenradierer perfekt funktioniert, allerdings finden wir nun destruktive Interferenz bei $\phi = 0$. Schließlich entpuppt sich jeder Winkel als geeignet: Konditioniert auf das entsprechende Subensemble beträgt die Sichtbarkeit jedes Mal $\mathcal{V} = 1$.

Wenden wir uns nun zwei verschränkten Grundzustandskonfigurationen zu. Im mesoskopischen Fall realisierte die isotrope Spin-Umklapp-Wechselwirkung eine sich in einer zusätzlichen interferometrischen Phase zeigende Sensitivität für quantenmechanische Korrelationen, siehe Abschnitt 3.1 auf Seite 30. Genau wie dort werden wir uns zunächst mit Singulett- und Triplettzuständen beschäftigen. Sei also durch

$$(5.18) \quad |\psi\rangle_{12} = |\Psi_{\pm}\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle_{12} \pm |10\rangle_{12}) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12} \pm |\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12})$$

der Zustand des atomaren Systems 12 gegeben. Die Polarisation des Photons wählen wir wie in unserem ersten Beispiel linkszirkular, beschrieben durch $|\psi\rangle_P = (|0\rangle_P - i|1\rangle_P)/\sqrt{2}$. Wir stellen fest, dass wir den ersten Zustand der Superposition (5.18) bereits behandelt haben: Nur das erste Atom koppelt an das Strahlungsfeld des Photons. Der zweite Zustand ergibt sich aus ersterem durch simples Vertauschen der Atome, $|\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12} = \mathcal{P}_{12}|\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12}$. Dementsprechend liegt hier also auf Pfad A der Dunkelzustand. Wir greifen nun erneut darauf zurück, dass Interferenz der Pfadalternativen nur dann vorliegt, wenn die assoziierten Endzustände des Markers überlappen. In den genau dies aussagenden Kreuzterm $\langle T_A^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_B \rangle_{\rho_M}$ gehen aufgrund der verbotenen Übergänge für Pfad A nur der Zustand $|\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12}$ und für Weg B ausschließlich $\pm |\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12}$ ein. Wir sehen sofort, dass deren Phasenbeziehung sich im Interferenzterm wiederfindet. Darüberhinaus ist sein Betrag für Singulett- und Triplettzustand gleich. Genau dieses Verhalten zeichnete sich im mesoskopischen Szenario des Abschnitts 3.1 als ausschlaggebend für die Detektion des Singulettzustands $|\Psi_-\rangle$.

Es sollen abschließend zwei Dinge betont werden. Wenn die Polarisation des Photons anfänglich rechtszirkular ist, vertauschen sich verglichen zu obigem Fall schlicht die Rollen der Atome. Übergänge, die verboten waren, sind jetzt erlaubt, und ehemalige σ -angeregte Zustände sind nun dunkel. Infolgedessen geht die Phasenbeziehung zwischen $|\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12}$ und $|\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12}$ weiterhin in den Interferenzkontrast bei $\phi = 0$ ein. Für beide Polarisationen $|\psi\rangle_P$, auch in ihrer inkohärenten Superposition – dann wäre das einfallende Photon vollkommen unpolarisiert –, reagiert die Anordnung deutlich auf den Wechsel von symmetrischer zu antisymmetrischer Grundzustandskonfiguration. Dies geschieht ganz allgemein und unabhängig von sowohl der Wahl der Beobachtungsrichtung $\hat{\mathbf{k}}'$ als auch der Auslese der Polarisation. Wir gehen daher mit Zuversicht zur heuristischen Suche einer Konfiguration (iv), (v) über, in der die Triplettzustände $|\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12}$, $|\Psi_+\rangle_{12}$ sowie $|\overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}, \overline{\leftarrow} \overline{\leftarrow}\rangle_{12}$ zu gleichen Interferenzfiguren $p'(\phi)$ führen. Dann wäre der Singulettzeuge W_- realisiert.

2.4. Implementierung von Verschränkungszeugen. Die vorangehende Diskussion hat die Hoffnung genährt, dass wie im mesoskopischen Szenario zunächst die Konfiguration höchster Symmetrie, nämlich eines Photons im zu Beginn unpolarisierten Zustand und ohne jedwede sich anschließende Polarisationsanalyse, einen Zeugen liefert, auf dessen Grundlage weitere Verschränkung detektierende Konfigurationen bestimmt werden könnten. (ii), (iv), (v) Wir wählen daher $\rho_P = \mathbb{1}/2$, $\hat{O}_P = \mathbb{1}$ und konzentrieren uns auf den Interferenzbeitrag $\mathcal{V} \cos \alpha = \langle \sigma_Q^1 \rangle_{\rho_Q'}$ bei verschwindendem interferometrischen Phasenfaktor, $\phi = 0$. Letzterer kann mittels Manipulation der durch die Streugeometrie gelenkten Phasenverschiebung $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_{21}$ kontrolliert werden, vergleiche Gl. (5.12) und Abb. 5.2. Dann ist

$$(5.19a) \quad \hat{O}_{12} = \frac{1}{2} \text{tr}_S \left[(\mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}}) \cdot T_B^\dagger \cdot (\mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_A + \text{h.c.} \right]$$

$$(5.19b) \quad = (1 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2) \mathbb{1} + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2,$$

wobei $\boldsymbol{\lambda} = \hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}} + \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}' + (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}') \circ (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}')$ eine unter der Vertauschung von $\hat{\mathbf{k}}$ und $\hat{\mathbf{k}}'$ symmetrische Dyade ist⁶. Wird die Detektion senkrecht zur Einfallsrichtung vorgenommen, $\vartheta = \pi/2$ bzw. $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' = 0$, wird $\boldsymbol{\lambda}$ eine Summe von Projektoren auf drei jetzt orthogonale Richtungen $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{k}}'$ und $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}'$, d.h. gleich der 3×3 -Einheitsmatrix, $\boldsymbol{\lambda} = \mathbb{1}$. In (5.19b) werden daraufhin alle drei Spinkomponenten gleich gewichtet. Die Youngsche Interferenz eines unpolarisierten, in der zur Einfallsrichtung $\hat{\mathbf{z}}$ orthogonalen x - y -Ebene detektierten Photons realisiert demzufolge ganz ohne Polarisationsselektion bis auf einen irrelevanten Vorfaktor den Singulettzeugen:

$$(5.20) \quad \hat{O}_{12} = \mathbb{1} + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 = 2 W_-.$$

Wegen $\langle T_A^\dagger \cdot (\mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_A + T_B^\dagger \cdot (\mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}}) \cdot T_B \rangle_{\rho_M} = 4$, gültig für beliebige $\hat{\mathbf{k}}$, $\hat{\mathbf{k}}'$, gilt dann für die Detektionsintensität in der x - y -Ebene

$$(5.21) \quad p'(\phi) = p'((\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_{21}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cos \phi \langle W_- \rangle_{\rho_{12}}$$

und daher $2p'(0) - 1 = \frac{1}{2} \langle W_- \rangle_{\rho_{12}}$.

2.4.1. Physikalische Diskussion – Wie funktioniert der Zeuge? Wir haben bereits gelernt, dass in den interferometrischen Überlapp $\langle T_A^\dagger \cdot (\mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_B \rangle_{\rho_M}$ stets die relative Phase zwischen den Zuständen $|\underline{\leftarrow}, \underline{\leftarrow}\rangle_{12}$ und $|\underline{\leftarrow}, \underline{\rightarrow}\rangle_{12}$ eingeht und daher die Quantenzustände $|\Psi_\pm\rangle_{12}$ durch Auftreten von konstruktiver respektive destruktiver Interferenz unterschieden werden können. Zum Verständnis der Funktionsweise der Verschränkungsdetektion in der soeben ermittelten Konfiguration soll nun physikalisch erklärt werden, warum die Interferenzmuster der drei Triplettzustände identisch sind. Zur Erinnerung: Im Spektrum von W_- teilt sich das Triplett den Eigenwert 1.

Für die Triplettproduktzustände $|\underline{\leftarrow}, \underline{\leftarrow}\rangle_{12}$ und $|\underline{\leftarrow}, \underline{\rightarrow}\rangle_{12}$ ist der Beweis leicht. Zu Beginn teilen wir den maximal gemischten Polarisationszustand des Photons in die inkohärente Mischung von links- und rechtszirkularer Polarisation auf und diskutieren diese getrennt.

Für rechtszirkular polarisiertes Licht ist $|\underline{\leftarrow}, \underline{\leftarrow}\rangle_{12}$ ein Dunkelzustand. In der komplementären Polarisation findet jedoch auf beiden Pfaden die σ^- -Anregung $\underline{\leftarrow}\underline{\leftarrow}$ statt, d.h. auf Pfad A bei Atom 1 und auf dem Weg B bei Atom 2. Für die Relaxation der Teilchen gibt es die Möglichkeiten $\underline{\leftarrow}\underline{\leftarrow}$ und $\underline{\leftarrow}\underline{\rightarrow}$, wobei senkrecht zur Einfalls- und damit zur Quantisierungsrichtung sowohl der π - als auch der σ -Übergang beobachtbar sind. Der π -Übergang bricht jedoch die Symmetrie zwischen den beiden Pfadalternativen:

$$(5.22) \quad |\underline{\leftarrow}, \underline{\leftarrow}\rangle_{12} = \mathcal{P}_{12} |\underline{\leftarrow}, \underline{\leftarrow}\rangle_{12} \neq |\underline{\leftarrow}, \underline{\rightarrow}\rangle_{12}.$$

⁶Für allgemeines $\hat{O}_Q = u\sigma_Q^0 + v\sigma_Q^1 + w\sigma_Q^2$ lautet die designierte Witness $\hat{O}_{12} = 4u\mathbb{1} + v\{(1 + (\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')^2)\mathbb{1} + \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\lambda} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2\} + w(\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}')(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}') \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 - \boldsymbol{\sigma}_1)$.

Da diese Zustände orthogonal sind, enthält der Term $\langle T_A^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_B \rangle_{\rho_M}$ schließlich nur den Überlapp der total symmetrischen Endzustände, d.h.

$$(5.23) \quad \langle T_A^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_B \rangle_{\rho_M} \propto {}_{12} \langle \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} | \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} \rangle_{12} = 1.$$

Wie sieht die Situation nun für den anderen zur Diskussion stehenden Triplettzustand $|\begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array}\rangle_{12}$ aus? Tatsächlich ergibt sich eine analoge Argumentationskette: Es ist unmittelbar verständlich, dass im Vergleich zu $|\begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}\rangle_{12}$ jetzt für ein linkszirkular polarisiertes Photon der Zustand dunkel ist. Im Kreuzterm bleibt schließlich übrig:

$$(5.24) \quad \langle T_A^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_B \rangle_{\rho_M} \propto {}_{12} \langle \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} | \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} \rangle_{12} = 1.$$

Da σ^+ - und σ^- -Übergänge gleiche Raten aufweisen, sind auch die in den Interferenzkontrast eingehenden Amplituden für beide Triplettzustände identisch. Bei unterlassener Polarisationsauslese stimmen daher die Interferenzfiguren überein.

Wir verschafften uns bereits in Unterabschnitt 2.3 Klarheit über die betragliche Gleichheit des Interferenztermes für den Singulett- und den verschränkten Triplettzustand. Wie sieht es damit aber innerhalb des Triplets aus? Es wurde bereits erklärt, dass im Falle eines linkszirkular polarisierten Photons wegen verbotener Übergänge ausschließlich die Zustände $|\begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array}\rangle_{12}$ für A und $|\begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}, \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}\rangle_{12}$ für B der Triplettsuperposition $|\Phi_+\rangle_{12}$ zur Interferenz beitragen. In der rechtszirkularen Konfiguration ist es gerade entgegengesetzt. Wir sehen sofort, dass nur die aus π -Übergängen stammenden Photonen interferieren, da die zirkular polarisierten Photonen aus $\begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array}$ bzw. $\begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array}$ die obigen total unterscheidbaren Grundzustandskonfigurationen hinterlassen. Natürlicherweise ist die Amplitude aus den π -Übergängen am höchsten, wenn senkrecht zur Quantisierungsachse detektiert wird. Man überzeugt sich schließlich davon, dass die relevanten Clebsch-Gordan-Koeffizienten gerade so sind, dass der resultierende Interferenzkontrast mit den zwei anderen Triplettzuständen übereinstimmt. Damit ist die Funktionsweise verdeutlicht.

2.4.2. *Aufspüren von weiteren Zeugen.* So schön unser Ergebnis ist, so wenig lässt es sich jedoch verallgemeinern: Selbst bei willkürlicher Wahl der interferometrischen Observable ρ_Q , für beliebige Richtungen der Photonpropagation und beliebige Polarisierungen bei Einfall und Detektion gelang es nicht, mit Youngscher Interferenz allgemein die Verschränkungszeugen $W_U = (\mathcal{U} \otimes \mathbb{1})W_-(\mathcal{U}^\dagger \otimes \mathbb{1})$ mit $\mathcal{U} \in \text{SU}(2)$ und speziell die Zeugen für die drei anderen Bellzustände umzusetzen. Was unterscheidet also den quantenoptischen vom mesoskopischen Fall, in dem das möglich ist? Zunächst lässt sich aufgrund der andersartigen Wechselwirkung die Homomorphie von $\text{SU}(2)$ und $\text{SO}(3)$ nicht anwenden. Um dies zu sehen und um einen Vergleich mit der Mesoskopik anstellen zu können, müssen wir die Übergangsooperatoren der Einzelstreuung etwas umschreiben. In \hat{O}_{12} tauchen Terme der Form $\text{tr}_S[\rho_S T_j^\dagger \cdot \hat{O}_S \cdot T_i]$ auf, es werden demnach die Freiheitsgrade der Polarisation und der Ausbreitungsrichtung herausgespurt. Eine äquivalente Modifikation dieses Prozesses lautet

$$(5.25) \quad \text{tr}_P[\rho_P \mathcal{T}_j^\dagger \hat{O}_P \mathcal{T}_i],$$

wobei die alternativen Übergangsooperatoren \mathcal{T}_i bereits die Propagationsrichtungen enthalten:

$$(5.26) \quad \mathcal{T}_i = \begin{pmatrix} (\hat{\mathbf{x}}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \sigma_i^x & (\hat{\mathbf{x}}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \sigma_i^y \\ (\hat{\mathbf{y}}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \sigma_i^x & (\hat{\mathbf{y}}' \cdot \boldsymbol{\sigma}_i) \sigma_i^y \end{pmatrix},$$

$i = A, B$ bzw. $i = 1, 2$. Die Matrixdarstellung ist hierbei bezüglich der Standardbasis des Polarisationsunterraums angegeben. Die Umformulierung hebt die bisherige strikte Unterteilung des Markers in Sonde und Zielsystem 12 zum Teil auf. Vorteil dieser Schreibweise ist, dass nun die transversale Polarisation des Photons direkt mit der Spinpolarisation des Elektrons aus Kapitel 4 verglichen werden kann. Im Falle zur Einfallsrichtung senkrechter

Detektion erhält man dann

$$(5.27) \quad \mathcal{T}_i = \begin{pmatrix} \pm i\sigma_i^2 & \mp i\sigma_i^1 \\ -\sin\varphi \mathbb{1} - i\cos\varphi \sigma_i^3 & -i\sin\varphi \sigma_i^3 + \cos\varphi \mathbb{1} \end{pmatrix}$$

und man bemerkt, dass dieser Operator die im mesoskopischen Kapitel 4 wichtige Eigenschaft $\mathcal{U}^{\otimes 3} \mathcal{T}_i^{(\dagger)} \mathcal{U}^{\otimes 3\dagger} = \mathcal{T}_i^{(\dagger)}$ nicht erfüllt. Die unitären Abbildungen lassen sich demzufolge nicht auf die Polarisationskonfigurationen allein abwälzen.

Führt denn eine kombinierte Anpassung von sowohl Polarisations- als auch Propagationsfreiheitsgraden zum Ziel? Leider nein, wie man auf die folgende Weise sieht: Unter Wiederverwendung der Ideen aus dem mesoskopischen Abschnitt sollte der Ansatz

$$(5.28a) \quad W_U \propto \mathcal{U}_1 \operatorname{tr}_S \left[\frac{1}{2} (\mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}} \circ \hat{\mathbf{k}}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \circ \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot (\mathbb{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \circ \boldsymbol{\sigma}_1) + \text{h.c.} \right] \mathcal{U}_1^\dagger$$

zum Ziel führen. Tatsächlich existiert für jedes $\mathcal{U} \in \text{SU}(2)$ ein $R_{\mathcal{U}} \in \text{SO}(3)$, sodass gilt: $\mathcal{U} (\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\sigma}) \mathcal{U}^\dagger = R_{\mathcal{U}} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \circ \boldsymbol{\sigma}) \cdot R_{\mathcal{U}}^T$. Damit findet man

$$(5.28b) \quad = \operatorname{tr}_S \left[\frac{1}{2} (R_{\mathcal{U}}^T - (R_{\mathcal{U}}^T \cdot \hat{\mathbf{k}}) \circ \hat{\mathbf{k}}) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \circ \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot (R_{\mathcal{U}} - \hat{\mathbf{k}}' \circ (R_{\mathcal{U}}^T \cdot \hat{\mathbf{k}}')) \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \circ \boldsymbol{\sigma}_1) + \text{h.c.} \right].$$

Außer für den trivialen Fall $\mathcal{U} = \pm \mathbb{1}$ mit $R_{\mathcal{U}} = \mathbb{1}$ wurde keine alternative Konfiguration der Orientierungen $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{k}}'$ sowie dem Anfangspolarisationszustand ρ_P und der Polarisatorobservablen \hat{O}_P gefunden, für die (5.28b) gleich

$$(5.28c) \quad = \operatorname{tr}_S \left[\rho_S \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \circ \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \hat{O}_S \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \circ \boldsymbol{\sigma}_1) + \text{h.c.} \right]$$

wäre.

Dies erklärt, warum das im mesoskopischen Szenario erfolgreiche Rezept im vorliegenden Fall nicht zum Erfolg verhelfen kann. Es wird aber hierdurch keine Antwort darauf gegeben, warum das System physikalisch nicht dazu in der Lage sein sollte, beispielsweise den Tripletzustand von einem beliebigen unverschränkten Zustand zu unterscheiden.

2.4.3. Erklärung durch Widerlegung. In diesem kurzen Paragraphen wird eine Konfiguration genannt, die ein Kriterium zur Detektion des Triplet- sowie des kanonisch maximal verschränkten Zustands ($|\Psi_+\rangle_{12}$ bzw. $|\Phi_+\rangle_{12}$) liefert. Wir fragen weiterhin mit σ_Q^1 die Kohärenzen des Quantons ab, präparieren das Photon jedoch in der reinen linearen Polarisation $\rho_P = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_P^3)$, was horizontaler Polarisation bezüglich der x - z -Referenzebene entspricht. Der optische Detektor wird im rechten Winkel zur Einfallrichtung positioniert, $\vartheta = \pi/2$. Man benötigt den Erwartungswert der Polarisationsobservablen $\hat{O}_P = \sigma_P^3$, der sich nicht aus dem durch $p'(\phi)$ beschriebenen Interferenzmuster ergibt⁷. Daher entspricht dieser Vorschlag *nicht* unseren Vorstellungen für eine einfache Implementierung. Man findet

$$(5.29) \quad \hat{O}_{12} = -2(\sin^2\varphi \mathbb{1} + \sigma_1^2 \sigma_2^2 - \cos^2\varphi \sigma_1^3 \sigma_2^3),$$

wobei hier noch der Azimutwinkel φ auftaucht, der die Position des Detektors um die Einfallrichtung $\hat{\mathbf{z}}$ rotiert. Dieser Operator hat die Eigenwerte $-4, 0, 4\cos^2\varphi$ und $-4\sin^2\varphi$ mit den Eigenzuständen $|\Phi_+\rangle_{12}, |\Phi_-\rangle_{12}, |\Psi_+\rangle_{12}$ sowie $|\Psi_-\rangle_{12}$, d.h. allen vier Bellzuständen. In der schon mehrfach verwendeten universellen Parametrisierung liest man für den Erwartungswert von \hat{O}_{12} bezüglich eines beliebigen Produktzustandes $|\psi\rangle_{12}$ aus obiger Gleichung einfach

$$(5.30) \quad -4 \leq {}_{12} \langle \psi | \hat{O}_{12} | \psi \rangle_{12} = -2(\sin^2\varphi + p_1^2 p_2^2 - \cos^2\varphi p_1^3 p_2^3) \leq 2$$

ab. Für die Wahl des Winkels φ bieten sich zwei Möglichkeiten an:

⁷Tatsächlich wird später in Abschnitt 3.3.2 ab Seite 53 die Messung dieser Observablen mittels Sortierung anhand der Ausgänge eines linear polarisierenden Strahlteilers diskutiert. Es werden in diesem Fall aber zwei optische Detektoren benötigt.

Detektion senkrecht zum Polarisationsvektor des einlaufenden Photons, d.h. $\varphi = \pm\pi/2$ und $\hat{\mathbf{k}}' = \pm\hat{\mathbf{y}}$. Dann findet man $-4 \leq {}_{12}\langle\psi|\hat{O}_{12}|\psi\rangle_{12} \leq 0$ und der einzige nicht verschwindende Eigenwert ist -4 . Zu ihm gehört der Projektor $|\Phi_+\rangle_{1212}\langle\Phi_+| + |\Psi_-\rangle_{1212}\langle\Psi_-|$. Es gibt keinen für Verschränkung charakteristischen Schwellenwert.

Detektion parallel zur Polarisationsrichtung des einlaufenden Photons, $\varphi = 0, \pi$ und $\hat{\mathbf{k}}' = \pm\hat{\mathbf{x}}$. Man hat dann $-2 \leq {}_{12}\langle\psi|\hat{O}_{12}|\psi\rangle_{12} \leq 2$ und $\hat{O}_{12} = 4(|\Psi_+\rangle_{1212}\langle\Psi_+| - |\Phi_+\rangle_{1212}\langle\Phi_+|)$. Der Detektionsbereich liegt damit außerhalb des Intervalls $[-2; 2]$, denn zwischen -2 und 2 ist dieser effektive Zeuge blind.

Es sollte an diesem Punkt klar sein, dass dieser effektive Verschränkungszeuge nur deshalb gefunden werden konnte, weil von zwei Vereinbarungen abgewichen wurde: Zum Einen führen wir keine *projektive* Messung auf dem Sondenteilchen durch und betrachten daher implizit den ungünstigen Erwartungswert $\langle\hat{O}_{QS}\rangle_{\rho'_{QS}}$. Dieser lässt sich nicht aus der Detektionswahrscheinlichkeit $p'(\phi)$ konstruieren, aber aus der Summe der Interferenzmuster der sortierten Subensembles. Zum Anderen – und das ist hier wesentlich – handelt es sich um einen effektiven Zeugen, d.h. der Schwellenwert liegt nicht bei Null, sondern es liegen zwei von Null verschiedene Schwellenwerte vor, die die Menge \mathcal{S} der separablen Zustände einschnüren. Richtig ist, dass die Vermutung, mit Einzelstreuung könnte Verschränkung in anderen Bellzuständen als $|\Psi_-\rangle_{12}$ nicht aufspürt werden, revidiert werden muss. Dennoch bringt uns das Resultat dieses Paragraphen auf dem Weg hin zu einem einfachen Verschränkungskriterium nicht weiter.

3. Doppelstreuung

Die Analyse der möglichen effektiven Observablen in der Einzelstreusituation hat ergeben, dass eine Detektion der Bellzustände $|\Phi_+\rangle_{12}$, $|\Phi_-\rangle_{12}$ und $|\Psi_+\rangle_{12}$ durch Daten aus der Ein-Photonen-Interferenz nicht in einfacher Weise möglich ist. Es liegt daher nahe, für die Suche nach den entsprechenden Verschränkungszeugen über die Youngsche Interferenz hinauszugehen, dem Streuprozess niedrigster Ordnung. Die nächste Ordnung im kleinen Parameter $1/kr_{21}$ ist die Doppelstreuung, ein Prozess, bei dem die Atome ein intermediäres virtuelles Photon austauschen. Erneut gibt es zwei mögliche, sich gegenseitig ausschließende Pfadalternativen A und B , die nun aber, da das Photon mit beiden Atomen sequentiell wechselwirkt, die Reihenfolge der Besuche angeben:

(i) Auf Weg A fällt das Photon mit einer Polarisation $\hat{\mathbf{e}}$ ein, interagiert mit dem ersten Atom 1, geht anschließend über zu Atom 2 und wird im Zustand $\hat{\mathbf{e}}'$ in Richtung \mathbf{k}' detektiert. Der alternative Pfad B ist die zeitliche Umkehrung von A , Abb. 5.4.

Um zu zeigen, dass mit dem Konzept der Quantendualität der Einfluss der internen Struktur der Streuer auf die Interferenz bei mehrfachen Streuprozessen behandelt werden kann, studierten Miniatura u. a. (2007) das vorliegende Doppelstreuszenario. Nach den Experimenten von Eichmann u. a. (1993) war klar, dass durch die Wechselwirkung des Photons mit den Atomen Pfadinformationen zurückgelassen werden, die ein Experimentator im Prinzip durch optimale Messung erfragen kann. Die durch das „Wissen der Natur“ über den Pfad beschränkte Unterscheidbarkeit der Wege verhält sich in diesem Sinne komplementär zum Kontrast der Interferenz. Da der Doppelstreuprozess sich gegenseitig ausschließende Pfadalternativen A und B definiert, ist auch diese Situation äquivalent zum Youngschen Interferometer. In abgewandelter Form erwartet man daher dieselben Effekte, möglicherweise sogar in Anbetracht von Verschränkung, da sich die Wechselwirkungen sehr ähnlich sind. Obwohl in Ref. (Miniatura u. a. 2007) eine vergleichsweise allgemeine Konfiguration untersucht worden war, konnte zunächst kein Hinweis auf ein besonderes Verhalten der Interferenz für verschränkte atomare Grundzustände gefunden werden. Deshalb aber von generellem Unvermögen der kohärenten Rückstreuung zur Sensitivität gegenüber Verschränkung zu sprechen, wäre verfrüht, denn im Verlauf dieses Abschnitts werden wir sehen, dass Detektion prinzipiell möglich ist.

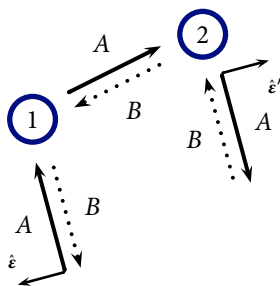


ABBILDUNG 5.4. Die beiden Pfadalternativen der Doppelstreuung. Entlang des Pfades A streut das Photon zunächst am ersten, dann am zweiten Atom, $A = 1 \rightarrow 2$. Auf Pfad $B = 2 \rightarrow 1$ geschieht dies in umgekehrter Reihenfolge. Gezeigt ist die Rückstreuungskonfiguration mit $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, in der die Phasendifferenz $\phi = (\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_{21}$ verschwindet. Da in diesem Fall die Interferenz selbst eine Mittelung über zufällige Atompositionen übersteht, nennt man dies *kohärente Rückstreuung* (Akkermans u. Montambaux 2007). Diese spielt eine entscheidende Rolle bei der schwachen Lokalisierung von Licht in einem Gas kalter Atome.

Setzen wir uns nun aber mit dem Problem der Doppelstreuung selbst auseinander. Vor dem Hintergrund der – abhängig von der dimensionslosen Entfernung kr_{21} – insbesondere im Vergleich mit der Einzelstreuung desaströs geringen Wahrscheinlichkeit eines solchen Prozesses zweiter Ordnung, müssen wir uns fragen, ob die doppelte Streuung überhaupt getrennt beobachtet werden kann. Tatsächlich wird nämlich ein eventuell interessantes Interferenzmuster zweifach gestreuter Photonen im Regelfall von einem ungleich intensiveren Muster überlagert⁸, dessen Photonen aus der Einzelstreuung stammen. Gibt es also eine Konstellation, in der Einzelstreuung nicht realisiert wird? In der Tat beträgt die Wahrscheinlichkeit Null, speziell in Rückrichtung, $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$, ein einfach gestreutes Photon mit erhaltener Helizität zu detektieren. Aufgrund der Drehimpulserhaltung muss sich – wie bei der Reflexion an einem Spiegel – die Helizität ändern: Der Spin bleibt erhalten, während die Propagationsrichtung ihr Vorzeichen wechselt⁹. An dieser Stelle ist zu beachten, dass für erfolgreiches pauschales Ausblenden der Einzelstreuung bereits alle Freiheitsgrade der Photonpräparation und -detektion festgelegt wären. Demgegenüber stünde die Wahl der Orientierung der Atome \hat{r}_{21} weiterhin frei, die sich bei der Einzelstreuung allein auf die Phase auswirkt.

Abgesehen von den beschriebenen Schwierigkeiten bei der Erfassung der interferometrischen Daten muss auch das in Abschnitt 3 inszenierte Rahmenwerk für die Dynamik des Interferometers im Rahmen der Doppelstreuung überdacht und rechtfertigt werden. Bei der Einzelstreuung sahen wir es durch die Forderung $kr_{21} \gg 1$ als erwiesen an, dass Kopplungen zwischen Wechselwirkungsprozessen und -Partnern auf den verschiedenen Pfaden unterbunden sind. Es liegt nahe, anzunehmen, dass sich Streuprozesse höherer Ordnung durch ungewollte Korrelationen in der pfadkonditionierten Dynamik und letztlich durch den Transfer von Wahrscheinlichkeiten zwischen den Pfadalternativen bemerkbar machen können. Hier senken wir nun den Abstand der Atome und sorgen für eine endliche Wahrscheinlichkeit der Doppelstreuung, die sich gerade durch Austausch eines intermediären virtuellen Teilchens zwischen den Atomen auszeichnet. Dies stellt aber kein Problem dar: Für sich allein genommen gehorchen einerseits sowohl die Pfadalternativen als auch die

⁸Im Übrigen findet man um die Rückrichtung herum die Maxima beider Interferenzfiguren nach gleichen Abständen, d.h. die Perioden sind gleich. Dies wird später klar.

⁹Weil Photonen transversal sind, werden solche aus π -Übergängen in Vorwärts- und Rückrichtung zudem nicht beobachtet.

Wechselwirkung des Doppelstreuungsprozesses korrekt der Einschränkung des Abschnitts 3. Andererseits ist, da wir weiterhin im Fernfeld mit $kr_{21} \gg 1$ verbleiben, die Doppelstreuung auch jetzt noch so viel unwahrscheinlicher als der Einzelstreuungsprozess, dass die Interferenz einfach gestreuter Photonen nur unwesentlich beeinträchtigt werden dürfte.

3.1. Herleitung der Streuoperatoren. Erneut finden wir die Antwort in der Bornreihe (5.11). Ihr zweiter Summand trägt, da er ungerade in der Zahl der Wechselwirkungspotentiale V ist, keinen physikalischen, ein oder zwei Atome einbeziehenden Prozess. Der dritte Term der Summe beschreibt jedoch die gesuchte doppelte Lichtstreuung. Für den Weg A findet man in Fernfeldnäherung, $kr_{21} \gg 1$,

$$(5.31) \quad \langle f | V G_0 V G_0 V G_0 V | i \rangle = \left(\frac{\hbar^2 g_\omega^2}{\hbar(\omega - \omega_0) + i\Gamma/2} \right)^2 \frac{\omega^2}{2\pi\hbar c^3} \frac{e^{i\omega r_{21}/c}}{\omega r_{21}/c} \cdot e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_1 - \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_2)} \{ \{ m' \} | (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}'^* \cdot \mathbf{d}_{\text{ge}}^2) (\mathbf{d}_{\text{eg}}^2 \cdot \Delta_{r_{21}} \cdot \mathbf{d}_{\text{ge}}^1) (\mathbf{d}_{\text{eg}}^1 \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}) | \{ m \} \}.$$

Dieser Ausdruck enthält die dyadischen Dipoloperatoren $\mathbf{d}_{\text{ge}}^{1,2} \circ \mathbf{d}_{\text{eg}}^{1,2}$ des Einzelstreuungsprozesses an den Atomen 1 und 2. (iii) Tatsächlich kann der aus obigem Matrixelement ablesbare, von Proportionalitätsfaktoren gesäuberte Übergangsoperator

$$(5.32a) \quad T_A = (\boldsymbol{\sigma}_2 \circ \boldsymbol{\sigma}_2) \cdot \Delta_{r_{21}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \circ \boldsymbol{\sigma}_1)$$

auch direkt ohne Verwendung von (5.31) konstruiert werden, wenn man die bekannten Einzelstreuoperatoren über den Fernfeldprojektor $\Delta_{r_{21}} = \mathbf{1} - \hat{\mathbf{r}}_{21} \circ \hat{\mathbf{r}}_{21}$ auf die zum Verbindungsvektor \mathbf{r}_{21} transversale Ebene in zeitgeordneter Weise miteinander verknüpft. Die Projektion stellt sicher, dass das Photon korrekt, d.h. transversal, von Atom 1 zu 2 propagiert. Der Operator für Pfad B wird durch Vertauschen der Rollen beider Atome gewonnen, also durch die Substitution $1 \leftrightarrow 2$, nämlich

$$(5.32b) \quad T_B = (\boldsymbol{\sigma}_1 \circ \boldsymbol{\sigma}_1) \cdot \Delta_{r_{21}} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_2 \circ \boldsymbol{\sigma}_2).$$

3.2. Implementierung von Singulett- und Triplettzeuge. In diesem Abschnitt werden wir sowohl W_- als auch W_+ mittels Ein-Photonen-Interferenz realisieren und damit zeigen, dass entgegen der Behauptung von Miniatura u. a. (2007) die Unterscheidung zwischen konstruktiver und destruktiver Interferenz ein Kriterium für Verschränkung zwischen den Atomen liefert.

(ii) Wir betrachten also den Interferenzkontrast $\mathcal{V} \cos \alpha$ im Zentrum der Interferenzfigur und wählen demzufolge wie bei der Einzelstreuung $\hat{O}_Q = \sigma_Q^1$. Die durch den Doppelstreuungsprozess induzierte Phase α wird den charakteristischen Vorzeichenwechsel induzieren.

(iv) Das Photon soll zu Beginn im maximal gemischten Polarisationszustand $\rho_P = \mathbb{1}/2$ vorliegen; dies deckt sich mit der Wahl bei der Einzelstreuung, Abschnitt 2.4. Während dort jedoch die Orientierung Θ des Verbindungsvektors $\mathbf{r}_{21} = r_{21}(\sin \Theta, 0, \cos \Theta)$ der Atome in Relation zur Einfallrichtung $\hat{\mathbf{k}}$ Auswirkungen allein auf die Phase ϕ hat, übt sie hier aufgrund des Auftretens des Fernfeldprojektors $\Delta_{r_{21}}$ in (5.32a) und (5.32b) deutlichen Einfluss auf die Wechselwirkung aus. Durch systematische Suche kommt man zu der Feststellung, dass zur Realisierung der genannten Zeugen senkrecht zu $\hat{\mathbf{r}}_{21}$ eingestrahlt werden muss: Wir setzen $\Theta = \pi/2$ und damit $\hat{\mathbf{r}}_{21} = \hat{\mathbf{x}}$.

(v) Wir entscheiden uns dafür, die Observable

$$(5.33) \quad \hat{O}_P = \mathbb{1} = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \sigma_P^3) + \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_P^3) \equiv \hat{P}_P^{(H)} + \hat{P}_P^{(V)}$$

zu messen. Dabei ist $\hat{P}_P^{(H)}$ der Projektor auf die lineare Polarisation in $\hat{\mathbf{x}}'$ -Richtung, während $\hat{P}_P^{(V)}$ das Licht vertikal im gestrichenen System, d.h. parallel zu $\hat{\mathbf{y}}'$, polarisiert. Diese Wahl von \hat{O}_P mag seltsam erscheinen, formal bedeutet sie nämlich den Verzicht auf die Polarisationsanalyse. Die Definition (5.33) beinhaltet aber gleich zwei mögliche Strategien, dies effektiv zu tun: Entweder es wird tatsächlich kein Polarisator verwendet – und die durch $p'(\phi)$ beschriebene Interferenzfigur ausgewertet – oder man implementiert explizit $\hat{P}_P^{(H)}$

plus $\hat{P}_p^{(V)}$. Dies wird durch einen polarisierenden Strahlteiler geleistet: Ein solches optisches Element kann beispielsweise durch Ausnutzen der Doppelbrechung von einigen Kristallen realisiert werden (Born u. Wolf 1980, Kap. 15.3). Fällt unpolarisiertes Licht in bestimmter Weise auf die Kristalloberfläche, wird es durch Brechung in zwei Strahlen unterschiedlicher Polarisation geteilt. In unserem Fall soll die Anordnung so justiert werden, dass zu gleichen Wahrscheinlichkeiten horizontal ($\hat{P}_p^{(H)}$) oder vertikal ($\hat{P}_p^{(V)}$) polarisierte Photonen den Kristall verlassen. Die Austrittsrichtung definiert dabei das Entscheidungskriterium zwischen den beiden Alternativen. Um die Photonen in zwei verschiedene Ensembles sortieren zu können, ist es nötig, den orthogonalen Polarisationsunterräumen unterschiedliche Mess- bzw. Eigenwerte zuzuordnen, nämlich beispielsweise 1 für horizontale und -1 für vertikale Polarisation. Formal wird so zwar σ_p^3 gemessen, da aber unsere Zuordnung rein willkürlich ist und nur zur Buchhaltung durchgeführt wird, besteht kein Widerspruch zur Definition (5.33).

3.3. Welche effektiven Observablen \hat{O}_{12} ergeben sich? Die Richtung \hat{k}' der optischen Detektion ließen wir bisher frei. Ihr Einfluss auf die effektive Wechselwirkung zwischen den Atomen soll nun bei der Diskussion der sich aus Gl. (5.33) ableitenden Implementierungen deutlich werden.

3.3.1. *Verzicht auf die Polarisationsmessung.* In diesem Fall findet man

$$(5.34a) \quad \hat{O}_{12} = \text{tr}_S[\rho_S \cdot (T_B^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{k}' \circ \hat{k}') \cdot T_A + \text{h.c.})]$$

$$(5.34b) \quad = 2 \{ \mathbb{1} + \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi (\sigma_1^1 \sigma_2^1 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) + \sigma_1^3 \sigma_2^3 \}.$$

Die Parameter ϑ und φ definieren Polar- und Azimutwinkel der Messrichtung \hat{k}' . Für sowohl Vorwärts- ($\vartheta = 0$) als auch Rückrichtung ($\vartheta = \pi/2$) und darüber hinaus falls $\varphi = \pm\pi/2$, also wenn \hat{k}' senkrecht auf \hat{r}_{21} steht, verschwinden die ersten zwei Pauli-Spin-Beiträge. Übrig bleibt dann ein Projektor auf die beiden unverschränkten Tripletzustände. In diesen Fällen ist Interferenz nur dann beobachtbar, wenn die beiden Atome zuvor in einem Zustand mit nicht verschwindendem Überlapp zu $|\rightarrow, \rightarrow, \rightarrow\rangle_{12}$ und $|\leftarrow, \leftarrow, \leftarrow\rangle_{12}$ präpariert worden waren¹⁰. Für die maximal verschränkten Zustände $|\Psi_{\pm}\rangle_{12}$ verschwinden demnach die Kohärenzen des Quantons und es liegt keine Interferenz vor. Wir sehen zudem, dass der Ausdruck (5.34) sehr viel einfacher ist als der bei sonst gleicher Konfiguration für Einzelstreuung gefundene effektive Operator \hat{O}_{12} aus Gl. (5.19b) auf Seite 47. Beiden gemein ist, dass sich mit ihnen leicht der Singulettzeuge W_- umsetzen lässt, nämlich durch Wahl von $\vartheta = \pm\pi/2$, d.h. $\hat{k}' \perp \hat{k}$. Da bei der Doppelstreuung die azimutale Symmetrie durch den Fernfeldprojektor gebrochen ist, muss zusätzlich $\varphi = 0$ verlangt werden. Die Detektion hat hier also parallel zur Verbindungsrichtung \hat{x} der Atome zu erfolgen. Mit unpolarisiertem $\rho_S = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \hat{k} \circ \hat{k})$ und dem in die Ensemblewahrscheinlichkeit eingehenden Erwartungswert des Operators

$$(5.35) \quad \text{tr}_S[\rho_S \cdot (T_A^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{k}' \circ \hat{k}') \cdot T_A + T_B^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{k}' \circ \hat{k}') \cdot T_B)] = 8 \mathbb{1}$$

erhält man den Interferenzbeitrag dann zu

$$(5.36) \quad 2p'(0) - 1 = \frac{1}{4} \langle W_- \rangle_{\rho_{12}}.$$

3.3.2. *Sortierung von Polarisationsmessungen.* Der Tripletzeuge $W_+ = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \sigma_1^1 \sigma_2^1 - \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \sigma_1^3 \sigma_2^3)$ war bisher nicht zu realisieren. In den einleitenden Bemerkungen wurde jedoch die simultane Realisierung von W_- und W_+ in Aussicht gestellt. Dazu diskutieren wir jetzt die Sortierung der Polarisationsobservable σ_p^3 mittels des polarisierenden Strahlteilers.

¹⁰Tatsächlich trifft dies für den Kontrast \mathcal{V} der gesamten Interferenzfigur zu, nicht nur an der Stelle $\phi = 0$.

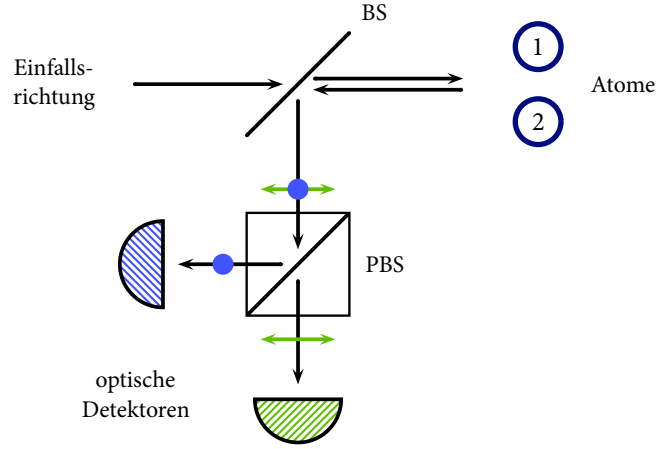


ABBILDUNG 5.5. Anordnung des vorgeschlagenen Doppelstreuexperimentes. Die Vorwärtsrichtung verbietet sich aufgrund störender Koinzidenz mit der Photonenquelle. Die Detektion um die Rückstreurichtung $\hat{\mathbf{k}}' = -\hat{\mathbf{k}}$ kann wie im Text erklärt mit einem polarisierenden Strahlteiler (PBS) durchgeführt werden, wobei sich mit Detektoren an den beiden Ausgängen der Singlett- und der Tripletzteuge simultan realisieren lassen. Genauer gesagt kann dabei der Zeuge W_- im Kanal \blacksquare horizontaler Polarisation und W_+ im orthogonalen Kanal \blacksquare der vertikalen Polarisation gefunden werden. Im letzteren Fall steht der Polarisationsvektor senkrecht auf sowohl $\hat{\mathbf{k}}'$ als auch $\hat{\mathbf{r}}_{21}$, d.h. der durch den Labortisch definierten Ebene, die hier mit der Papierebene zusammenfällt. Die Beschriftung „BS“ steht für „beam splitter“ und meint einen nichtpolarisationssensitiven Strahlteiler.

Setzen wir uns zu Beginn mit dem Subensemble horizontal polarisierter Photonen auseinander. Die effektive Observable lautet in diesem Fall

$$(5.37a) \quad \hat{O}_{12}^{(H)} = \text{tr}_S[\rho_S \cdot (T_B^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H)} \cdot T_A + \text{h.c.})]$$

$$(5.37b) \quad = 2 \{ \mathbb{1} + (1 - 2 \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi) (\sigma_1^1 \sigma_2^1 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) + \sigma_1^3 \sigma_2^3 \},$$

wobei der Projektor $\hat{P}_S^{(H)}$ nach Definition (5.17) gegeben ist durch

$$(5.38) \quad \hat{P}_S^{(H)} = (\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}') \cdot \hat{P}_P^{(H)} \cdot \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}'^T \\ \hat{\mathbf{y}}'^T \end{pmatrix}.$$

In Vorwärts- ($\vartheta = 0$) und in Rückrichtung ($\vartheta = \pi$) finden wir

$$(5.39) \quad \hat{O}_{12}^{(H)} = 2 \{ \mathbb{1} - \cos(2\varphi) (\sigma_1^1 \sigma_2^1 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) + \sigma_1^3 \sigma_2^3 \}.$$

Dabei beschreibt der Azimutwinkel φ die Drehung des gestrichenen Koordinatensystems um die Propagationsachse $\hat{\mathbf{k}}' = \pm \hat{\mathbf{k}}$. Es ist daher sinnvoll, diesen Winkel gleich Null zu wählen, damit – falls man die x - z -Ebene parallel zur Oberfläche des Labortisches legt – sowohl im ungestrichenen als auch im gestrichenen System die Eigenschaft „horizontal polarisiert“ ihre übliche Bedeutung erhält. Damit realisiert $\hat{O}_{12}^{(H)}$ bis auf den Faktor 2 den Tripletzteugen W_+ .

Die Wahrscheinlichkeit $p^{(H)}$, ein Photon in der linearen horizontalen Polarisation vorzufinden, beträgt wegen Gl. (5.35) und

$$(5.40) \quad \text{tr}_S[\rho_S \cdot (T_A^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H)} \cdot T_A + T_B^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H)} \cdot T_B)] = 4 \mathbb{1}$$

einfach

$$(5.41) \quad p^{(H)} = \langle \hat{P}_P^{(H)} \rangle_{\rho'_P} = \frac{\langle T_A^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H)} \cdot T_A + T_B^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H)} \cdot T_B \rangle_{\rho_M}}{\langle T_A^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_A + T_B^\dagger \cdot (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}}' \circ \hat{\mathbf{k}}') \cdot T_B \rangle_{\rho_M}} = \frac{1}{2}.$$

Dies würde man für einen symmetrischen Strahlteiler erwarten. An dessen horizontal polarisiertem Ausgang können wir schließlich den Interferenzbeitrag

$$(5.42) \quad 2p^{(H)}(0) - 1 = \frac{1}{2} \langle W_+ \rangle_{\rho_{12}}$$

mit dem Erwartungswert des Tripletzteugen W_+ identifizieren, Abb. 5.5.

Widmen wir uns noch kurz der Option, die Detektion orthogonal zur Einfallrichtung vorzunehmen. Mit $\vartheta = \pm\pi/2$ greifen wir damit zum Einen die Wahl zur erfolgreichen Realisation des Singulettzeugens im Falle der Einzelstreuung und zum Anderen die gefundene Konfiguration im vorangehenden Unterabschnitt 3.3.1 auf. Die horizontale Polarisationsrichtung liegt nun parallel zur Einfallrichtung, $\hat{\mathbf{x}}' = -\hat{\mathbf{z}}$, und ist damit invariant unter Wahl des Azimutwinkels φ . Interessanterweise ergibt sich wieder der Singulettzeug, es ist

$$(5.43) \quad \hat{O}_{12}^{(H)} = 2W_-.$$

Was hingegen liefert uns der andere Ausgang? Die mit der vertikalen Polarisation $\hat{P}_P^{(V)}$ assoziierte effektive Observable $\hat{O}_{12}^{(V)}$ lautet

$$(5.44) \quad \hat{O}_{12}^{(V)} = 2 \{ \mathbb{1} + \cos(2\varphi) (\sigma_1^1 \sigma_2^1 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) + \sigma_1^3 \sigma_2^3 \}.$$

Zunächst fällt auf, dass dieser Ausdruck unabhängig vom Polarisationswinkel ϑ ist. Dies wird klar, wenn wir zurück zur Abbildung 5.3b auf Seite 44 blicken: Die im gestrichelten System vertikale Polarisationsrichtung $\hat{\mathbf{y}}'$ ist stets senkrecht zu $\hat{\mathbf{k}}$ und besitzt daher unter keinen Umständen einen Anteil in z -Richtung. Wir setzen wieder $\varphi = 0$ und sorgen damit erneut dafür, dass „vertikal“ im gestrichelten System auch „vertikal“ im durch den Labortisch definierten Bezugssystem bedeutet. Ein kurzer Blick auf Gl. 5.44 verrät, dass $\hat{O}_{12}^{(V)}$ uns mit dem Singulettzeugen W_- versorgt. Des Weiteren beträgt die Ensemblewahrscheinlichkeit $p^{(V)}$ vertikal polarisierter Photonen erwartungsgemäß $\frac{1}{2}$.

Die vorgenommene Wahl der Parameter stimmt mit der oben gefundenen Konfiguration für den Tripletzteugen W_+ überein. Es ist damit gezeigt, dass mit der in Abb. 5.5 dargestellten Anordnung aus den simultan durch Sortierung vermessbaren Interferenzfiguren $p^{(H)}(\phi)$ und $p^{(V)}(\phi)$ die gewünschten Erwartungswerte $\langle W_+ \rangle_{\rho_{12}}$ und $\langle W_- \rangle_{\rho_{12}}$ abgeleitet werden können. Die Position des optischen Detektors kann unterdies entweder um die Vorwärts- oder um die Rückrichtung variiert werden.

3.4. Schönheitsfehler. Es wurde bereits darauf hingewiesen, dass das Interferenzsignal der Doppelstreuung nur in Überlagerung mit der durch den Einzelstreuungsprozess gegebenen Hintergrundintensität gemessen werden kann. Die Isolierung des Doppelstreubeitrags erweist sich in der Regel als schwierig, da das Einzelstreusignal mit einer geometrieabhängigen und sehr viel höheren Intensität anliegt. Zur Korrektur dieses ungleichen Verhältnisses müsste man die beiden Atome sehr viel näher zusammen rücken. Dies wäre aber unverträglich mit der Fernfeldnäherung $kr_{21} \gg 1$, die für relativ einfache pfadkonditionierte Streuoperatoren sorgt und – wichtiger noch – sicherstellt, dass der Doppelstreubeitrag alle anderen Mehrfachstreuungsprozesse (dritter, vierter, usw. Ordnung) dominiert. Stellt man die Überlegung an, ob sich vielleicht verschiedene Abstände zwischen den Maxima der überlagerten Interferenzmuster ergeben, wird man enttäuscht: Für zur Verbindungsachse der Atome senkrechte Einstrahlung, wie sie hier verlangt wird, ist die Differenz ϕ der Phasen für die Wege A und B für Einzelstreuung ($-$) und Doppelstreuung ($+$) gegeben durch

$$(5.45) \quad (\mathbf{k} \pm \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}_{21} = \pm \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}_{21}.$$

Die Periode ist somit für beide Ein-Photonen-Interferenzprozesse gleich.

Die Zuversicht, doch noch mittels Doppelstreuung Verschränkung nachweisen zu können, wächst, wenn man den Interferenzkontrast \mathcal{V} der Einzelstreuung diskutiert. Für vorwärts wie auch rückwärts gerichtete Detektion ergibt sich im Falle anfangs unpolarisierter Photonen und bei anschließender Polarisationsselektion in den Kanälen H und V

$$(5.46a) \quad \mathcal{V} = \frac{2 |\langle T_A^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H,V)} \cdot T_B \rangle_{\rho_M}|}{\langle T_A^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H,V)} \cdot T_A + T_B^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H,V)} \cdot T_B \rangle_{\rho_M}}$$

$$(5.46b) \quad = \frac{1}{4} |\langle \text{tr}_S[(\mathbf{1} - \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \cdot T_A^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H,V)} \cdot T_B] \rangle_{\rho_{12}}|$$

$$(5.46c) \quad = \frac{1}{2} \langle \mathbf{1} + \sigma_1^3 \sigma_2^3 \rangle_{\rho_{12}},$$

also in beiden Fällen der Erwartungswert des bereits bekannten Projektors auf die zwei Tripletzustände $|\underline{\bullet}, \underline{\bullet}, \underline{\bullet}\rangle_{12}$ und $|\underline{\bullet}, \underline{\bullet}, \underline{\bullet}\rangle_{12}$:

$$(5.46d) \quad = {}_{12} \langle \underline{\bullet}, \underline{\bullet}, \underline{\bullet} | \rho_{12} | \underline{\bullet}, \underline{\bullet}, \underline{\bullet} \rangle_{12} + {}_{12} \langle \underline{\bullet}, \underline{\bullet}, \underline{\bullet} | \rho_{12} | \underline{\bullet}, \underline{\bullet}, \underline{\bullet} \rangle_{12}.$$

Da jeder Projektor ein positiver Operator ist, wird der Erwartungswert (5.46c) reell (und ferner stets nichtnegativ) sein. Infolgedessen verschwindet die durch Wechselwirkung induzierte Phase α , wir finden

$$(5.47) \quad \alpha = \arg(\langle T_A^\dagger \cdot \hat{P}_S^{(H,V)} \cdot T_B \rangle_{\rho_M}) = 0.$$

Ausnahmslos beobachtet man daher um die Vorwärts- oder Rückrichtung herum konstruktive Interferenz der Einzelstreuamplituden. Wir entnehmen Gl. (5.46d), dass bei Präparation der maximal verschränkten Zustände $|\Psi_{\pm}\rangle_{12}$, die ja im Zentrum unseres Interesses stehen, der Interferenzkontrast \mathcal{V} verschwindet. Eine eventuell erkennbare Interferenzfigur muss in diesem Fall auf Photonen aus dem Doppelstreuprozess zurückgehen. Mehr noch, da in $\phi = 0$ die Einzelstreuinterferenz stets konstruktiv ist, ist jedwede erkannte destruktive Interferenz ein sicheres Zeichen für Verschränkung: Betrachtet man graduell die inkohärenten Überblendungen von $\rho_{12} = \mathbf{1}/4$ und $|\Psi_{\pm}\rangle_{12}$, so wird angefangen bei der maximalen Mischung die Sichtbarkeit der Interferenz $\mathcal{V} = \frac{1}{2}$ betragen, um bei Erreichen der maximalen Verschränkung schließlich zu vergehen. Es wird daher einen Punkt geben, an dem die destruktive Interferenz der Doppelstreuung bei $\phi = 0$ überwiegt. In einem Experiment kann dann mit etwas Glück ein potentiell durch Rauschen verunreinigter Singulett- oder Tripletzustand nachgewiesen werden.

RESÜMEE

In diesem Abschnitt betrachteten wir die Streuung eines Photons an zwei Atomen in engen Fallen. Deren Grundzustände bildeten ein Qubit-Paar, dessen Verschränkung es nachzuweisen galt. Der Streuprozess niedrigster Ordnung ist die Einfachstreuung, bei der die Pfadalternativen durch den Besuch eines der beiden Atome definiert werden. Diese Youngsche Interferenz wurde bereits von Eichmann u. a. (1993) experimentell nachgewiesen. Die Sensitivität des Interferometers auf Verschränkung ist jedoch neu: Es konnte hier gezeigt werden, dass im Interferenzmuster eines unpolarisierten Photons bei zur Propagationsrichtung senkrechter Detektion ein Kriterium zur Detektion des Singulettzustandes enthalten ist, nämlich der Übergang von konstruktiver zu destruktiver Interferenz. Die Implementierung des Singulettzeugen W_- konnte aufgrund der sehr einfachen Konfiguration erklärt werden. Jedoch ließen sich keine *echten* Verschränkungszeugen für den Tripletzustand sowie für die beiden anderen Bellzustände $|\Phi_{\pm}\rangle_{12}$ konstruieren. Als problematisch stellte sich dabei die Anisotropie der entsprechenden Zeugen in den Pauli-Spin-Operatoren sowie fehlende Invarianz der Streuoperatoren unter bestimmten unitären Transformationen dar.

Schon allein der geglückte Fund von W_- ist auf den ersten Blick kurios, denn intuitiv würde man annehmen, das Photon müsse (wie es bei der Doppelstreuung der Fall ist) beide Atome sequentiell besuchen, um Korrelationen sichtbar zu machen. Das „Teilchen“, was

tatsächlich beide Atome besucht, ist aber das Quanton. Wir sehen hier die physikalische Relevanz dieses Qubits, das ja ursprünglich nur als Hilfsobjekt eingeführt wurde, um die statistischen Eigenschaften und die Kohärenz der beiden Pfadalternativen A und B während der Quanteninterferenz zu beschreiben.

In der anschließend studierten Doppelstreusituation, in der die Wegalternativen durch die Reihenfolge der Streueignisse gegeben sind, gelang uns schließlich die Realisierung des Tripletzeugen W_+ und gleichzeitig der Beweis, dass (kohärente) Doppelstreuung feinfühlig auf Verschränkung reagiert. Wir revidierten damit eine von (Miniatura u. a. 2007) gegebene Einschätzung. Obwohl der absolute Interferenzbeitrag der Doppelstreuung demjenigen der Einzelstreuung in der Regel erdrückend unterliegt, gelingt vermutlich die Detektion von $|\Psi_{\pm}\rangle_{12}$ in der vorgeschlagenen Geometrie, da der Interferenzkontrast der aus Einzelstreuung stammenden Photonen in diesem Fall verschwindet.

Zusammenfassung und Ausblick

Durch die Untersuchung eines vereinfachten mesoskopischen wie auch eines wirklichkeitsnahen quantenoptischen Szenarios wurde gezeigt, dass anhand der Interferenz einer einzelnen Sonde über die Verschränkung zweier identischer Probenteilchen entschieden werden kann. Der Schlüssel dazu ist die kohärente Wechselwirkung zwischen Sonde und Probe. Die physikalische Observable ist dabei die das Interferenzbild zeichnende Detektionswahrscheinlichkeit, und die Signatur der Verschränkung bildet oftmals einfach der Wechsel von konstruktiver zu destruktiver Interferenz.

Der Nachweis gelang, da der Interferenzfigur Erwartungswerte effektiver Observablen zu entnehmen sind, die allein auf die Probe wirken. Es stellte sich heraus, dass sowohl bei der Wechselwirkung eines Elektrons mit zwei magnetischen Störstellen in einem Aharonov-Bohm-Festkörperinterferometer als auch bei der Streuung eines Photons an zwei gefangenen Atomen einfacher interner Struktur realisierbare experimentelle Konfigurationen existieren, für die diese effektive Observable Verschränkung zwischen den Probenteilchen bezeugt.

Für den realistischeren quantenoptischen Fall ist eine durchführbare experimentelle Bestätigung zu erwarten, da die Anordnung im Wesentlichen der Situation der Experimente von Eichmann u. a. (1993) entspricht. Einzig die Präparation des verschränkten Zustands geht über die einstigen Möglichkeiten der Gruppe hinaus.

Was haben wir bisher noch nicht gelernt? Mit der Herstellung des verschränkten Zustands ist noch eine andere offene Frage verknüpft. Die tatsächliche Implementierung des Vorschlags dieser Arbeit erfordert eine große Anzahl von Messungen und jede Messung bedarf vorheriger Präparation, da der verschränkte Zustand im Allgemeinen durch die Wechselwirkung mit der Sonde zerstört wird. Wie ist diesem Problem zu begegnen?

Wenn die Quantendynamik des Systems deterministisch zu kontrollieren wäre, ließen sich die Populationen und Kohärenzen der Probenteilchen gezielt manipulieren. Im quantenoptischen Fall ist vermutlich durch Wechselwirkung mit einem treibenden, speziell angepassten Strahlungsfeld ein verschränkter, strahlungsstabiler Gleichgewichtszustand zu erreichen (Bargatin u. a. 2000a, b). Durch die resonante Dipol-Dipol-Wechselwirkung stünden die beiden Atome durch Austausch virtueller Photonen ständig in Kontakt. Die Idee ist, ähnlich wie von Loss u. Sukhorukov (2000) im mesoskopischen Szenario illustriert, zwischen zwei erfassten Ein-Teilchen-Interferenzen das System in diesen feinabgestimmten Grundzustand relaxieren zu lassen.

Ein anderer Gedanke verfolgt die parallele Präparation etlicher, in einem optischen Gitter periodisch angeordneter, identischer Probenpaare. Das Photon hätte die Möglichkeit, an vielen Kopien zu streuen, und es käme demzufolge zur Viel-Wege-Interferenz (Kaszlikowski u. a. 2003; Englert u. a. 2007). Es läge dann in einer Superposition vieler Zustände vor, wobei ein jeder einem Streupfad zuzuordnen wäre. Es ist nicht klar, welchen Einfluss dies auf das derzeitige Konzept üben würde. Die Anordnung hätte den Vorteil langsamerer Dekohärenz: Der Gesamtzustand des Systems würde durch eine einzige Streuung weniger beeinflusst werden als im vorliegenden Fall mit nur zwei Atomen.

Auf der mathematischen Seite lassen sich die Resultate in eine interessante Richtung erweitern. Bis zu diesem Punkt lag der Schwerpunkt ausschließlich bei der Detektion von Verschränkung. Darüber hinaus sollte man Notiz davon nehmen, dass Aufwand betrieben

wurde, den Erwartungswerten von Verschränkungszeugen quantitative Relevanz zuzuordnen. Einige Zeugen – der Singulettverschränkungszeuge ist einer davon – geben eine untere Schranke an die Concurrence (oder ein anderes Verschränkungsmaß) und ermöglichen so quantitative Charakterisierungen (Brandão 2005; Cavalcanti u. Cunha 2006; Gühne u. a. 2007; Eisert u. a. 2007; Mintert 2007).

Es soll zum Schluss noch auf ein Phänomen hingewiesen werden, welches sich während der Studien der Doppelstreuung ergab und von dem in der vorliegenden Arbeit bisher nicht berichtet wurde. In besonderen Situationen vermag die Wechselwirkung zwischen Photon und Atomen, die vor der Streuung vorliegende Verschränkung zwischen den Grundzuständen der Atome eins-zu-eins auf die Verschränkung zwischen Quanton und Marker zu übertragen: Je mehr Verschränkung zu Beginn vorliegt, um so schwächer ist der Kontrast des resultierenden Interferenzmusters. Betrachten wir beispielsweise den Singulettzustand. Da er maximal verschränkt ist, verschwindet die Interferenz gänzlich. Es wurde festgestellt, dass in diesem Fall die Sichtbarkeit durch die Sortierung einer bestimmten optimalen Messung auf den Atomen wiederhergestellt werden kann. Als die auf den Atomen zu messende Observable wurde aber frappierenderweise der Singulettzeuge gefunden. Angesichts dieser Entdeckung ist zu prüfen, ob die Wechselwirkung nicht so manipuliert werden kann, dass die Verschränkung nach der Interferenz allein zwischen Quanton und Sonde vorliegt. In diesem Fall wäre sie mit den diskutierten Mitteln leicht auszulesen.

Separabilität und Verschränkungsmaße

Im Folgenden wollen wir uns der theoretisch-mathematischen Beschreibung von Verschränkung zwischen lediglich zwei Teilen widmen. Tatsächlich lassen sich am Beispiel zweiteiliger Quantensysteme die Konzepte der Verschränkungstheorie in angenehmer Weise diskutieren. Dabei können einige Resultate anstandslos auf Systeme mit drei und mehr Konstituenten übertragen werden, während andere einer simplen Verallgemeinerung trotzen und dafür sorgen, dass zum jetzigen Zeitpunkt wenig über die Situation in mehrteiligen Systemen bekannt ist.

1. Verschränkte Quantenzustände

Dieser Abschnitt gibt eine Definition eines verschränkten Quantenzustands und beschäftigt sich mit der Frage, wie entschieden werden kann, ob und, falls ja, wie stark eine gegebene Probe Verschränkung aufweist. Zunächst benötigen wir einen mathematischeren Zugang: Ein Quantenzustand auf einem Hilbertraum $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, wobei mit 1 und 2 die beiden Subsysteme bezeichnet werden sollen, ist entweder *separabel* oder *verschränkt*. Für einen reinen Zustand $|\psi\rangle$ lässt sich die Unterscheidung sehr leicht vornehmen: Der Vektor $|\psi\rangle$ heißt separabel genau dann, wenn er als (Tensor-)Produktzustand $|\psi\rangle = |\psi\rangle_1 \otimes |\psi\rangle_2 \equiv |\psi\rangle_1 |\psi\rangle_2$ geschrieben werden kann. Die Kenntnis des Zustands des Gesamtsystems legt also die Zustände von 1 und 2 eindeutig fest. Ist dies nicht der Fall, so ist $|\psi\rangle$ verschränkt. Die einfachste mögliche Verschränkung tritt zwischen zwei Qubits auf, d.h. zwischen zwei Spin-1/2-Teilchen mit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ und $d_1 = d_2 = 2$. Besonders hervorzuheben sind die Bell-Zustände,

$$(A.1a) \quad |\Phi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle),$$

$$(A.1b) \quad |\Psi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle),$$

die jeweils die maximal mögliche Verschränkung zeigen.

Einen gemischten Zustand ρ nennt man separabel, falls er auf klassische Weise präpariert werden kann oder anders gesprochen, wenn die Korrelationen zwischen Messungen eines vollständigen Satzes von Observablen allein durch klassische Wahrscheinlichkeiten beschrieben werden können. Für den Dichteoperator ρ bedeutet dies, dass er als Konvexkombination von Produktzuständen darstellbar ist (Werner 1989):

$$(A.2) \quad \rho = \sum_{i \in I} p_i \rho_1^i \otimes \rho_2^i,$$

wobei I eine Indexmenge, die p_i klassische Wahrscheinlichkeiten mit $\sum_{i \in I} p_i = 1$ und $\rho_{A,B}^i$ wohl definierte Zustände auf den Teilsystemen sind. Existiert eine derartige Zerlegung nicht, so heißt ρ verschränkt, gibt es sie, so ist sie im Allgemeinen nicht eindeutig. Im Falle endlichdimensionaler Hilberträume \mathcal{H} , also für $d_1, d_2 < \infty$, können die $\rho_{A,B}^i$ stets rein gewählt werden. Die Menge der separablen Dichteoperatoren ρ wird mit \mathcal{S} bezeichnet, sie ist die abgeschlossene *konvexe* Hülle aller reinen Produktzustände. Als Beispiel für einen gemischten separablen Zustand zweier Qubits sei $\rho = (|00\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)/2$ genannt, der zwar klassische Korrelationen, aber keine quantenmechanischen aufweist. Demgegenüber ist mein Beispiel für einen verschränkten Zustand der Wernersche Zustand (Werner 1989) $\rho_B =$

$\frac{1}{3}p\mathbb{1} + (1 - \frac{4}{3}p)|\Psi_{-}\rangle\langle\Psi_{-}|$, der zwischen dem Projektor auf den Triplettssektor ($p = 1$), der Identität ($p = 3/4$) und dem Projektor auf den Singulettzustand $|\Psi_{-}\rangle$ ($p = 0$) interpoliert. Mit den hieran anknüpfend behandelten Verschränkungsmaßen ermittelt man, dass ρ_B für alle $p \geq \frac{1}{2}$ separabel, für $p < \frac{1}{2}$ verschränkt ist und schließlich maximale Verschränkung für $p = 0$ erreicht.

2. Quantifizierung von Verschränkung

In der Regel ist es schwer, zu entscheiden, ob ein gegebener gemischter Zustand separabel ist oder nicht. Noch schwieriger ist es, darüber hinaus die Verschränkung eines Zustandes zu quantifizieren. Im Folgenden sollen kurz die wichtigsten Anforderungen an ein Verschränkungsmaß E genannt werden, ohne auf die Vielzahl möglicher Maße im Detail einzugehen:

In Übereinstimmung mit der Diskussion zu Beginn dieser Arbeit kann die Verschränkung eines Quantensystems unter LOCC, d.h. lokalen Operationen auf den Quantenteilsystemen, klassischer Kommunikation zwischen den Parteien und projektiver Auslese (*Post-Selektion*) – je beschrieben durch einen Superoperator Λ –, nicht zunehmen. LOCC definieren also jene Klasse von Zustandsentwicklungen, die jegliche kohärenten Wechselwirkungen zwischen den Subsystemen ausschließen. Diese quanteninformationstheoretische *Monotonie*-Eigenschaft lautet konkret für einen Quantenzustand ρ :

$$(A.3) \quad E(\Lambda\rho) \leq E(\rho).$$

Da sich jede LOCC-Operation in der Form

$$(A.4) \quad \Lambda\rho = \sum_i (A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger)\rho(A_i^\dagger \otimes B_i^\dagger)$$

schreiben lässt¹, darf sich E somit beispielsweise unter den lokalen unitären Transformationen $\Lambda\rho = (U_1 \otimes U_2)\rho(U_1^\dagger \otimes U_2^\dagger)$ nicht ändern.

Ein in obigem Sinne konzipiertes monotonen Maß E ist konstant auf der Menge der separablen Zustände \mathcal{S} , da jeder separable Zustand unter LOCC in einen beliebigen anderen Zustand aus \mathcal{S} umgewandelt werden kann. Des Weiteren folgt, dass ein auf der Menge aller Zustände definiertes E sein globales Minimum auf \mathcal{S} annimmt, da man jeden separablen Zustand per LOCC aus jedem beliebigen anderen Zustand formen kann. Es macht daher Sinn, dieses Minimum auf den Wert Null zu setzen, d.h. E verschwindet auf \mathcal{S} . Aufgrund dieser beiden Vereinbarungen ist E bereits ein nichtnegatives Funktional. Verschränkungsmaße sind meist konvex, d.h. für zwei beliebige Zustände ρ und σ findet man

$$(A.5) \quad E(\lambda\rho + (1 - \lambda)\sigma) \leq \lambda E(\rho) + (1 - \lambda)E(\sigma),$$

$0 \leq \lambda \leq 1$. Konvexität wird als notwendige Bedingung für Kompatibilität mit der üblichen mathematischen Formulierung von Monotonie eingeführt. Außer diesen Forderungen gibt es noch eine Reihe von möglichen Eigenschaften (Bruß 2002), die oft nützlich sind, in speziellen Fällen sich in natürlicher Weise ergeben und daher oft gefordert werden.

Es existiert ein Verfahren zur Konstruktion von gültigen monotonen Verschränkungsmaßen (Uhlmann 1998). Man beginnt mit einem explizit für reine Zustände $|\psi\rangle$ konzipierten Maß \tilde{E} und verallgemeinert dieses auf gemischte ρ durch Suchen der kleinsten Verschränkung unter allen Konvexkombinationen reiner Zustände, in die sich ρ zerlegen lässt:

$$(A.6) \quad E(\rho) = \inf_{\{I, p_i, \psi_i\}} \sum_{i \in I} p_i \tilde{E}(\psi_i),$$

wobei $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Das Infimum wird auf einem bestimmten optimal genannten Ensemble $\{I, p_i, \psi_i\}$ angenommen (Uhlmann 1998). Für jedes gültige streng monotone Maß \tilde{E} ist E nach Konstruktion monoton für alle Zustände, einschließlich der gemischten. Die Suche nach einem Verschränkungsmaß reduziert sich daher auf den Fall reiner Zustände.

¹Konkret wurde dies in Ref. (Bennett u. a. 1999) behandelt. Offensichtlich besteht auch ein Zusammenhang zu der Formulierung beliebiger Quantenkanäle mittels Krausoperatoren, siehe Abschnitt 3 des Kapitels 2.

Das wohl wichtigste auf diesem Wege gewonnene Maß ist das *Entanglement of Formation* E_F (Bennett u. a. 1996), für das $\tilde{E}(\psi)$ gleich der von-Neumann-Entropie der reduzierten Dichtematrix ρ_1 bezüglich $|\psi\rangle\langle\psi|$ gesetzt wird:

$$(A.7) \quad \tilde{E}(\psi) = S(\text{tr}_2 |\psi\rangle\langle\psi|) = -\langle \log_2 \rho_1 \rangle_{\rho_1} = -\sum_{\lambda \in \sigma(\rho_1)} \lambda \log_2 \lambda \geq 0.$$

Eine Formulierung mit vertauschten Spurbildungen ist ebenso möglich und äquivalent. Die von-Neumannsche Entropie misst die Abweichung von einem reinen Zustand: S ist dann und nur dann Null, wenn alle Eigenwerte des reduzierten Zustands ρ_1 bis auf einen verschwinden². In diesem Fall ist der Dichteoperator nicht mehr von einem reinen Zustand zu unterscheiden. Dies bedeutet aber, dass $|\psi\rangle$ ein Produktzustand war. Aufgrund der Fähigkeit, den Grad der Verschränkung zwischen 1 und 2 zu messen, heißt die von-Neumannsche Entropie auch *Entropie der Verschränkung*.

Der Name „Entanglement of Formation“ erklärt sich wiederum auf folgende Weise: Seien Alice und Bob zwei Experimentatoren, die an verschiedenen, räumlich getrennten Messplätzen jeweils Zugang zu ausschließlich einem der beiden Subsysteme 1, 2 haben. Um einen nichtlokal verschränkten, gemischten Zustand ρ ohne den Austausch von anderen verschränkten Teilchen zu erzeugen, müssen sie bereits ein Äquivalent von $E_F(\rho)$ maximal verschränkten Zuständen teilen. Falls sie also zusammen bereits diesen Betrag an Verschränkung besitzen, sind sie prinzipiell dazu in der Lage, ρ zu erzeugen. In diesem Sinne ist $E_F(\rho)$ die Menge an Verschränkung, die zur Erzeugung von ρ erforderlich ist.

Während bei der Bestimmung der Entropie die größte Schwierigkeit darin besteht, das Spektrum $\sigma(\rho_1)$ zu ermitteln, gestaltet sich die Berechnung von E_F deutlich komplexer, für höherdimensionale Systeme mit d_1 oder $d_2 > 2$ ist unglücklicherweise kein analytischer Ausdruck bekannt. Für aus zwei Quantenbits bestehende Systeme kann E_F jedoch über das zu diesem Zweck eingeführte (Hill u. Wootters 1997) Maß *Concurrence* \mathcal{C} vergleichsweise leicht berechnet werden (Wootters 1998), womit sich dessen Wichtigkeit erklärt. Man findet für einen beliebigen Zustand ρ

$$(A.8) \quad E_F(\rho) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 + \mathcal{C}(\rho)}}{2}\right).$$

h ist gleich der binären Entropie $h(x) = -x \log_2 x - (1-x) \log_2 (1-x)$, während \mathcal{C} durch

$$(A.9) \quad \mathcal{C}(\rho) = \max\{0, 2\lambda_{\max} - \sum_i \lambda_i\}$$

gegeben ist³. λ_{\max} bezeichnet hier den größten der Eigenwerte λ_i der hermiteschen Matrix $\sqrt{\rho(\sigma^2 \otimes \sigma^2)\rho^*(\sigma^2 \otimes \sigma^2)}$, wobei ρ^* komplexe Konjugation des Dichteoperators in der Standardbasis meint. Ein Vorteil der Concurrence ist, dass ihr Quadrat für jeden reinen Zustand

$$(A.10) \quad |\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle$$

ein einfaches Polynom der Koeffizienten ist:

$$(A.11) \quad \mathcal{C}(\psi) = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|.$$

Da die Concurrence selbst ein Verschränkungsmaß ist – sie ist positiv für verschränkte Zustände –, wurde (Rungta u. a. 2001) eine Verallgemeinerung auf zweiteilige Systeme beliebiger Dimension vorgenommen⁴: Für reine Zustände $\rho \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ ergibt sie sich zu $\tilde{\mathcal{C}}(\psi) =$

²Dieser letzte nichtverschwindende Eigenwert ist aufgrund der Anforderung an die Spur von ρ_1 gleich 1.

³In die Berechnung der Concurrence fließt *jeder* Eigenwert ein, d.h. ist λ_{\max} entartet, verschwindet \mathcal{C} . Um dies besser zu sehen, schreibt man (A.9) auch häufiger $\mathcal{C}(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}$, wobei die Eigenwerte in absteigender Reihenfolge der Größe nach sortiert sind.

⁴Man bezeichnet oft die ursprünglich für bipartite Qubit-Systeme aufgestellte, später aber auf höhere Dimensionen verallgemeinerte Concurrence als *I-Concurrence* (Rungta u. a. 2001), da es mehrere andere Vorschläge gibt (Fan u. a. 2003; Gour 2005; Sinolęcka u. a. 2002).

$\sqrt{2(\langle \psi | \psi \rangle - \text{tr}_1[\rho_1^2])}$. Betrachtet man gemischte Zustände, muss analog zum Entanglement of Formation auf eine Konvexkombination

$$(A.12) \quad \mathcal{C}(\rho) = \inf_{\{I, p_i, \psi_i\}} \sum_{i \in I} p_i \tilde{\mathcal{C}}(\psi_i)$$

zurückzugegriffen werden. $\mathcal{C}(\rho)$ verschwindet dann und nur dann, wenn ρ separabel ist. Genau wie bei E_F definiert (A.12) ein hochdimensionales Optimierungsproblem, welches mühsam – oft numerisch – gelöst werden muss. Da das Infimum bei einer solchen numerischen Optimierung in endlicher Zeit nicht notwendigerweise angenommen wird, kann das Verfahren prinzipiell nur eine obere Schranke liefern. Erschwerend kommt hinzu, dass im Allgemeinen die Infima von \mathcal{C} und E_F nicht auf demselben Ensemble $\{I, p_i, \psi_i\}$ angenommen werden. Man behilft sich dadurch, dass man untere Schranken für \mathcal{C} sucht, die sich einfacher berechnen lassen.

3. Eine Ergänzung zu maximal verschränkten Zuständen

Der Inhalt dieses Abschnitt lässt sich zwar dem Kontext der Verschränkungstheorie zuordnen, er stellt aber keine Fortsetzung der vorherigen Diskussion dar. Stattdessen soll konkret gezeigt werden, dass der Überlapp eines Produktzustands $|\psi\rangle_{12}$ und dem maximal verschränkten Zustand $U|\Phi_+\rangle_{12}$ mit $U = \mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{V}_2$ und beliebigen $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in U(2)$ maximal $\frac{1}{2}$ betragen kann. Dabei ist $|\Phi_+\rangle_{12} = (|00\rangle_{12} + |11\rangle_{12})/\sqrt{2}$ der kanonisch maximal verschränkte Zustand auf 12. Ein kurzer Beweis könnte so lauten: Sei $|\psi\rangle_{12}$ durch $|\psi\rangle_{12} = \frac{1}{4}(\mathbb{1} + \hat{p}_1 \cdot \sigma_1)(\mathbb{1} + \hat{p}_2 \cdot \sigma_2)$, $|\hat{p}_{1,2}| = 1$, universell parametrisiert. Dann ist der Überlapp

$$(A.13) \quad \begin{aligned} |{}_{12}\langle \psi | U | \Phi_+ \rangle_{12}|^2 &= \frac{1}{4} (1 + {}_{12}\langle \Phi_+ | \mathcal{U}_1^\dagger (\hat{p}_1 \cdot \sigma_1) \mathcal{U}_1 | \Phi_+ \rangle_{12} + \\ &\quad + {}_{12}\langle \Phi_+ | \mathcal{V}_2^\dagger (\hat{p}_2 \cdot \sigma_2) \mathcal{V}_2 | \Phi_+ \rangle_{12} + {}_{12}\langle \Phi_+ | \mathcal{U}_1^\dagger (\hat{p}_1 \cdot \sigma_1) \mathcal{U}_1 \mathcal{V}_2^\dagger (\hat{p}_2 \cdot \sigma_2) \mathcal{V}_2 | \Phi_+ \rangle_{12}). \end{aligned}$$

Wir verwenden die Homomorphie von $SU(2)$ und $SO(3)$ oder anders gesagt die Existenz einer eindeutigen Abbildung der Gruppe $SU(2)$ auf die gewöhnliche Drehgruppe $SO(3)$ im dreidimensionalen Raum: Es gilt

$$(A.14a) \quad \mathcal{U}^\dagger (\hat{p}_1 \cdot \sigma) \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_{\mathcal{U}}} \end{pmatrix} \hat{p}'_1 \cdot \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_{\mathcal{U}}} \end{pmatrix}$$

und analog

$$(A.14b) \quad \mathcal{V}^\dagger (\hat{p}_2 \cdot \sigma) \mathcal{V} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta_{\mathcal{V}}} \end{pmatrix} \hat{p}'_2 \cdot \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_{\mathcal{V}}} \end{pmatrix}$$

mit $\hat{p}'_{1,2} = R_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \hat{p}_{1,2}$, wobei $R_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \in SO(3)$ und $\theta_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$(A.15a) \quad \begin{aligned} |{}_{12}\langle \psi | U | \Phi_+ \rangle_{12}|^2 &= \frac{1}{4} \{ 1 + \cos(\theta_{\mathcal{U}} + \theta_{\mathcal{V}}) (p_1^1 p_2^1 - p_1^2 p_2^2) \\ &\quad + \sin(\theta_{\mathcal{U}} + \theta_{\mathcal{V}}) (p_1^1 p_2^2 + p_1^2 p_2^1) + p_1^3 p_2^3 \} \end{aligned}$$

$$(A.15b) \quad \begin{aligned} &\leq \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{2} |p_1^1|^2 + \frac{1}{2} |p_2^2|^2 \sin^2(\theta_{\mathcal{U}} + \theta_{\mathcal{V}}) + p_2^1 \cos(\theta_{\mathcal{U}} + \theta_{\mathcal{V}}) \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |p_1^2|^2 + \frac{1}{2} |p_2^1|^2 \sin^2(\theta_{\mathcal{U}} + \theta_{\mathcal{V}}) - p_2^2 \cos(\theta_{\mathcal{U}} + \theta_{\mathcal{V}}) \right\}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} |p_1^3|^2 + \frac{1}{2} |p_2^3|^2 \} \end{aligned}$$

$$(A.15c) \quad = \frac{1}{2}.$$

Literaturverzeichnis

Aharonov u. Bohm 1959

AHARONOV, Y. ; BOHM, D.: Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. In: *Phys. Rev.* 115 (1959), Nr. 3, S. 485–491

Akkermans u. Montambaux 2007

AKKERMANS, Eric ; MONTAMBAUX, Gilles: *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons*. Cambridge University Press, 2007

Aspect u. a. 1982

ASPECT, Alain ; GRANGIER, Philippe ; ROGER, Gérard: Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities. In: *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982), Nr. 2, S. 91–94

Bargatin u. a. 2000a

BARGATIN, I. V. ; GRISHANIN, B. A. ; ZADKOV, V. N.: Analysis of radiatively stable entanglement in a system of two dipole-interacting three-level atoms. In: *Phys. Rev. A* 61 (2000), Nr. 5, S. 052305

Bargatin u. a. 2000b

BARGATIN, I. V. ; GRISHANIN, B. A. ; ZADKOV, V. N.: Generation of entanglement in a system of two dipole-interacting atoms by means of laser pulses. In: *Fortschr. Phys.* 48 (2000), S. 637–641

Barnes u. a. 2000

BARNES, C. H. W. ; SHILTON, J. M. ; ROBINSON, A. M.: Quantum computation using electrons trapped by surface acoustic waves. In: *Phys. Rev. B* 62 (2000), Nr. 12, S. 8410–8419

Bell 1964

BELL, John S.: On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. In: *Physics* 1 (1964), S. 195

Bennett u. a. 1999

BENNETT, Charles H. ; DIVINCENZO, David P. ; FUCHS, Christopher A. ; MOR, Tal ; RAINS, Eric ; SHOR, Peter W. ; SMOLIN, John A. ; WOOTTERS, William K.: Quantum nonlocality without entanglement. In: *Phys. Rev. A* 59 (1999), Nr. 2, S. 1070–1091

Bennett u. a. 1996

BENNETT, Charles H. ; DIVINCENZO, David P. ; SMOLIN, John A. ; WOOTTERS, William K.: Mixed-state entanglement and quantum error correction. In: *Phys. Rev. A* 54 (1996), Nr. 5, S. 3824–3851

Berry 1984

BERRY, Michael V.: Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. In: *Proceedures of the Royal Society of London A* 392 (1984), S. 45–57

Born u. Wolf 1980

BORN, M. ; WOLF, E.: *Principles of optics*. Oxford : Pergamon Press, 1980

Bourennane u. a. 2004

BOURENNANE, Mohamed ; EIBL, Manfred ; KURTSIEFER, Christian ; GAERTNER, Sascha ; WEINFURTER, Harald ; GÜHNE, Otfried ; HYLUS, Philipp ; BRUSS, Dagmar ; LEWENSTEIN, Maciej ; SANPERA, Anna: Experimental Detection of Multipartite Entanglement using Witness Operators. In: *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004), Nr. 8, S. 087902

Brandão 2005

BRANDÃO, Fernando G. S. L.: Quantifying entanglement with witness operators. In: *Phys. Rev. A* 72 (2005), Nr. 2, S. 022310

Braun u. a. 2004

BRAUN, Matthias ; KÖNIG, Jürgen ; MARTINEK, Jan: Theory of transport through quantum-dot spin valves in the weak-coupling regime. In: *Phys. Rev. B* 70 (2004), Nr. 19, S. 195345

Brezger u. a. 2002

BREZGER, Björn ; HACKERMÜLLER, Lucia ; UTTENTHALER, Stefan ; PETSCHINKA, Julia ; ARNDT, Markus ; ZEILINGER, Anton: Matter-Wave Interferometer for Large Molecules. In: *Phys. Rev. Lett.* 88 (2002), Nr. 10, S. 100404

Bruß 2002

BRUSS, Dagmar: Characterizing entanglement. In: *J. Math. Phys.* 43 (2002), Nr. 9, S. 4237–4251

Burkard u. a. 2000

BURKARD, Guido ; ENGEL, Hans-Andreas ; LOSS, Daniel: Spintronics and Quantum Dots for Quantum Computing and Quantum Communication. In: *Fortschr. Phys.* 48 (2000), Nr. 9-11, S. 965–986

Cavalcanti u. Cunha 2006

CAVALCANTI, Daniel ; CUNHA, Marcelo O. T.: Estimating entanglement of unknown states. In: *Appl. Phys. Lett.* 89 (2006), Nr. 8, S. 084102

Cohen-Tannoudji u. a. 1997

COHEN-TANNOUDJI, Claude ; DUPONT-ROC, Jacques ; GRYNBERG, Gilbert: *Photons and Atoms: Introduction to Quantum Electrodynamics*. New York : John Wiley & Sons, 1997

Cohen-Tannoudji u. a. 1998

COHEN-TANNOUDJI, Claude ; DUPONT-ROC, Jacques ; GRYNBERG, Gilbert: *Atom-Photon Interactions: Basic Processes and Applications*. New York : John Wiley & Sons, 1998

Costa Jr. u. a. 2006

COSTA JR., A. T. ; BOSE, S. ; OMAR, Y.: Entanglement of Two Impurities through Electron Scattering. In: *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006), Nr. 23, S. 230501

Dürr u. a. 1998

DÜRR, S. ; NONN, T. ; REMPE, G.: Fringe Visibility and Which-Way Information in an Atom Interferometer. In: *Phys. Rev. Lett.* 81 (1998), Nr. 26, S. 5705–5709

Dürr u. Rempe 2000

DÜRR, Stephan ; REMPE, Gerhard: Complementarity and quantum erasure in an atom interferometer. In: *Opt. Commun.* 179 (2000), Nr. 1-6, S. 323–335

Edmonds 1996

EDMONDS, A. R.: *Angular Momentum in Quantum Mechanics*. Princeton, N.J. : Princeton Univ. Press, 1996

Eichmann u. a. 1993

EICHMANN, U. ; BERGQUIST, J. C. ; BOLLINGER, J. J. ; GILLIGAN, J. M. ; ITANO, W. M. ; WINELAND, D. J. ; RAIZEN, M. G.: Young's interference experiment with light scattered from two atoms. In: *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993), Nr. 16, S. 2359–2362

Einstein 1905

EINSTEIN, A.: Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. In: *Ann. Phys.* 17 (1905), S. 132–148

Einstein u. a. 1935

EINSTEIN, A. ; PODOLSKY, B. ; ROSEN, N.: Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? In: *Phys. Rev.* 47 (1935), Nr. 10, S. 777–780

Eisert u. a. 2007

EISERT, J. ; BRANDÃO, F. G. S. L. ; AUDENAERT, K. M. R.: Quantitative entanglement witnesses. In: *New J. Phys.* 9 (2007), Nr. 3, S. 46

Englert 1996

ENGLERT, Berthold-Georg: Fringe Visibility and Which-Way Information: An Inequality. In: *Phys. Rev. Lett.* 77 (1996), Nr. 11, S. 2154–2157

Englert 1999

ENGLERT, Berthold-Georg: Remarks on some basic issues in quantum mechanics. In: *Z. Naturforsch.* 54 a (1999), S. 11–32

Englert u. a. 2007

ENGLERT, Berthold-Georg ; KASZLIKOWSKI, Dagomir ; KWEK, Leong C. ; CHEE, Wei H.: Wave-particle duality in multi-path interferometers: General concepts and three-path interferometers. arXiv:0710.0179 (2007)

Fan u. a. 2003

FAN, Heng ; MATSUMOTO, Keiji ; IMAI, Hiroshi: Quantify entanglement by concurrence hierarchy. In: *J. Phys. A* 36 (2003), Nr. 14, S. 4151–4158

Gour 2005

GOUR, Gilad: Family of concurrence monotones and its applications. In: *Phys. Rev. A* 71 (2005), Nr. 1, S. 012318

Gühne u. a. 2002

GÜHNE, O. ; HYLLUS, P. ; BRUSS, D. ; EKERT, A. ; LEWENSTEIN, M. ; MACCHIAVELLO, C. ; SANPERA, A.: Detection of entanglement with few local measurements. In: *Phys. Rev. A* 66 (2002), Nr. 6, S. 062305

Gühne u. a. 2007

GÜHNE, O. ; REIMPELL, M. ; WERNER, R. F.: Estimating Entanglement Measures in Experiments. In: *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007), Nr. 11, S. 110502

Hayashi 2006

HAYASHI, Masahito: *Quantum Information: An Introduction*. Berlin, Heidelberg : Springer, 2006

Hewson 1997

HEWSON, A. C.: *The Kondo Problem to Heavy Fermions*. Cambridge University Press, 1997 (Cambridge Studies in Magnetism 2)

Hill u. Wootters 1997

HILL, Scott ; WOOTTERS, William K.: Entanglement of a Pair of Quantum Bits. In: *Phys. Rev. Lett.* 78 (1997), Nr. 26, S. 5022–5025

Itano u. a. 1998

ITANO, W. M. ; BERGQUIST, J. C. ; BOLLINGER, J. J. ; WINELAND, D. J. ; EICHMANN, U. ; RAIZEN, M. G.: Complementarity and Young's interference fringes from two atoms. In: *Phys. Rev. A* 57 (1998), Nr. 6, S. 4176–4187

Jaeger u. a. 1993

JAEGER, Gregg ; HORNE, Michael A. ; SHIMONY, Abner: Complementarity of one-particle and two-particle interference. In: *Phys. Rev. A* 48 (1993), Nr. 2, S. 1023–1027

Jaeger u. a. 1995

JAEGER, Gregg ; SHIMONY, Abner ; VAIDMAN, Lev: Two interferometric complementarities. In: *Phys. Rev. A* 51 (1995), Nr. 1, S. 54–67

Jakob u. Bergou 2003

JAKOB, Matthias ; BERGOU, Janos A.: Quantitative complementarity relations in bipartite systems. arXiv:quant-ph/0302075v1 (2003)

James u. a. 2001

JAMES, Daniel F. V. ; KWIAT, Paul G. ; MUNRO, William J. ; WHITE, Andrew G.: Measurement of qubits. In: *Phys. Rev. A* 64 (2001), Nr. 5, S. 052312

Kaszlikowski u. a. 2003

KASZLIKOWSKI, Dagomir ; KWEK, Leong C. ; ŻUKOWSKI, Marek ; ENGLERT, Berthold-Georg: Information-Theoretic Approach to Single-Particle and Two-Particle Interference in Multipath Interferometers. In: *Phys. Rev. Lett.* 91 (2003), Nr. 3, S. 037901

Kraus 1983

KRAUS, K.: *Lecture Notes in Physics*. Bd. 190: *States, Effects, and Operations: Fundamental Notions*

of *Quantum Theory*. Berlin : Springer, 1983

Loss u. Sukhorukov 2000

LOSS, Daniel ; SUKHORUKOV, Eugene V.: Probing Entanglement and Nonlocality of Electrons in a Double-Dot via Transport and Noise. In: *Phys. Rev. Lett.* 84 (2000), Nr. 5, S. 1035–1038

Miniatura u. a. 2007

MINIATURA, Christian ; MÜLLER, Cord A. ; LU, Yin ; WANG, Guangquan ; ENGLERT, Berthold-Georg: Path distinguishability in double scattering of light by atoms. In: *Phys. Rev. A* 76 (2007), Nr. 2, S. 022101

Mintert 2007

MINTERT, Florian: Concurrence via entanglement witnesses. In: *Phys. Rev. A* 75 (2007), Nr. 5, S. 052302

Müller u. Miniatura 2002

MÜLLER, C. A. ; MINIATURA, C.: Multiple scattering of light by atoms with internal degeneracy. In: *J. Phys. A: Math. Gen.* 35 (2002), S. 10163

Nielsen u. Chuang 2000

NIELSEN, Michael ; CHUANG, Isaak: *Quantum Information and Quantum Computation*. Cambridge University Press, 2000

Oi u. Aberg 2006

OI, Daniel K. L. ; ABERG, Johan: Fidelity and Coherence Measures from Interference. In: *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006), Nr. 22, S. 220404

Peshkin u. Tonomura 1989

PESHKIN, M. ; TONOMURA, A.: *Lecture Notes in Physics*. Bd. 340: *The Aharonov-Bohm Effect*. Berlin : Springer, 1989

Pierre u. Birge 2002

PIERRE, F. ; BIRGE, Norman O.: Dephasing by Extremely Dilute Magnetic Impurities Revealed by Aharonov-Bohm Oscillations. In: *Phys. Rev. Lett.* 89 (2002), Nr. 20, S. 206804

Preskill 1998

PRESKILL, John: *Lecture notes for physics 229: Quantum information and computation*. <http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/>. Version: 1998

Rauch u. Summhammer 1984

RAUCH, H. ; SUMMHAMMER, J.: Static versus time-dependent absorption in neutron interferometry. In: *Phys. Lett. A* 104 (1984), Nr. 1, S. 44–46

Reed 1993

REED, Mark A.: Quantum Dots. In: *Scientific American* 268 (1993), Nr. 1, S. 118–123

Rungta u. a. 2001

RUNGTA, Pranaw ; BUŽEK, V. ; CAVES, Carlton M. ; HILLERY, M. ; MILBURN, G. J.: Universal state inversion and concurrence in arbitrary dimensions. In: *Phys. Rev. A* 64 (2001), Nr. 4, S. 042315

Schrödinger 1935a

SCHRÖDINGER, Erwin: Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. In: *Naturwissenschaften* 23 (1935), Nr. 49, S. 823–828

Schrödinger 1935b

SCHRÖDINGER, Erwin: Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik. In: *Naturwissenschaften* 23 (1935), Nr. 48, S. 807–812

Schwindt u. a. 1999

SCHWINDT, Peter D. D. ; KWIAT, Paul G. ; ENGLERT, Berthold-Georg: Quantitative wave-particle duality and nonerasing quantum erasure. In: *Phys. Rev. A* 60 (1999), Nr. 6, S. 4285–4290

Sinołęcka u. a. 2002

SINOŁĘCKA, Magdalena M. ; ŻYCKOWSKI, Karol ; KUŚ, Marek: Manifolds of interconvertible pure states. In: *Act. Phys. Pol. B* 33 (2002), S. 2081

Stinespring 1955

STINESPRING, W. F.: Positive functions on C^* -algebras. In: *Proc. Amer. Math. Soc.* 6 (1955), S. 211–216

Summhammer u. a. 1987

SUMMHAMMER, J. ; RAUCH, H. ; TUPPINGER, D.: Stochastic and deterministic absorption in neutron-interference experiments. In: *Phys. Rev. A* 36 (1987), Nr. 9, S. 4447–4455

Tonomura u. a. 1989

TONOMURA, A. ; ENDO, J. ; MATSUDA, T. ; KAWASAKI, T. ; EZAWA, H.: Demonstration of single-electron buildup of an interference pattern. In: *Am. J. Phys.* 57 (1989), Nr. 2, S. 117–120

Uhlmann 1998

UHLMANN, Armin: Optimizing entropy relative to a channel or a subalgebra. In: *Open Sys. Inf. Dyn.* 5 (1998), S. 209

Vogel u. Risken 1989

VOGEL, K. ; RISKEN, H.: Determination of quasiprobability distributions in terms of probability distributions for the rotated quadrature phase. In: *Phys. Rev. A* 40 (1989), Nr. 5, S. 2847–2849

Washburn u. Webb 1992

WASHBURN, S. ; WEBB, R. A.: Quantum transport in small disordered samples from the diffusive to the ballistic regime. In: *Rep. Prog. Phys.* 55 (1992), Nr. 8, S. 1311–1383

Werner 1989

WERNER, Reinhard F.: Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model. In: *Phys. Rev. A* 40 (1989), Nr. 8, S. 4277–4281

Wickles u. Müller 2006

WICKLES, Christian ; MÜLLER, Cord A.: Thermal breakdown of coherent backscattering: a case study of quantum duality. In: *Europhys. Lett.* 74 (2006), S. 240

Wootters 1998

WOOTTERS, William K.: Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. In: *Phys. Rev. Lett.* 80 (1998), Nr. 10, S. 2245–2248

Żukowski u. Kaszlikowski 1997

ŻUKOWSKI, Marek ; KASZLIKOWSKI, Dagomir: Critical visibility for N -particle Greenberger-Horne-Zeilinger correlations to violate local realism. In: *Phys. Rev. A* 56 (1997), Nr. 3, S. R1682–R1685

Zwanziger u. a. 1990

ZWANZIGER, J. W. ; KOENIG, M. ; PINES, A.: Berry's Phase. In: *Annual Review of Physical Chemistry* 41 (1990), Nr. 1, S. 601–646