Blatt 13: Dirac-Gleichung $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = 0$ Abgabe: 08.02.10

Aufgabe 24: Ebene Wellen als Lösungen der freien Dirac-Gleichung (12 Punkte)

(a) Prolog: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass sich ein Dirac-Spinor $\psi \in \mathbb{C}^4$ bei einer passiven Lorentztransformation $x' = \Lambda x$ wie $\psi'(x') = S_\Lambda \psi(x)$ transformiert, wobei $S_\Lambda = \exp\{-\frac{i}{2}\omega^{\mu\nu} J_{\mu\nu}\}$ mit den Generatoren $J_{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$.

Zeigen Sie, dass eine reine Lorentztransformation durch $S_\Lambda = \exp\{\frac{1}{2}\boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{\alpha}\}$ beschrieben wird, wobei die Dirac-Matrizen in der Standard-Darstellung durch $\beta^0 = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $\alpha^k = \gamma^0\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ \sigma^k & 0 \end{pmatrix}$ definiert sind. Folgern Sie, dass

$$S_\Lambda = \frac{m + p^0 + \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\alpha}}{\sqrt{2m(p^0 + m)}} =: S(p). \tag{1}$$

wenn der Schub aus dem Ruhesystem mit $q = (m, 0, 0, 0)$ ins System mit $p = (p^0, \boldsymbol{p})$ erfolgt.

(b) Wir setzen Lösungen der freien Dirac-Gleichung als ebene Wellen an: $\psi_p(x) = e^{-ix\cdot p} u_p$. Warum? Welche Gleichung erfüllt u_p?

Wir wollen zunächst die Lösung im Ruhesystem bstimmen. Zeigen Sie, dass es zwei linear unabhängige Lösungen $\psi^+_{qs}(x) = e^{-imt} u_s$ $(s = 1, 2)$ gibt mit $u_s = \begin{pmatrix} \chi_s \\ 0 \end{pmatrix}$, wobei $\chi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\chi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ beispielsweise als die beiden Eigenzustände der Pauli-Matrix $\sigma^3 = \sigma_z$ gewählt werden können.

Zeigen Sie außerdem, dass es zwei weitere linear unabhängige Lösungen der Form $\psi^-_{qs}(x) = e^{+imt} v_s$ gibt mit $v_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \chi_s \end{pmatrix}$. Diese beiden Lösungen gehören zu einer negativen Ruheenergie $E = -m$, die ebenfalls der Energie-Impulsbeziehung $E(q)^2 = m^2$ genügt.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass man die Lösungen für beliebiges p jetzt durch Anwendung des Schubs (1) in folgender Form erhält: $\psi^+_{ps}(x) = e^{-ix\cdot p} S(p) u_s =: e^{-ix\cdot p} u_{ps}$ und $\psi^-_{ps}(x) = e^{ix\cdot p} S(p) v_s =: e^{ix\cdot p} v_{ps}$, wobei

$$\begin{aligned} u_{ps} &= \frac{m + p\!\!\!/}{\sqrt{2m(m+p_0)}} u_s = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_0)}} \begin{pmatrix} (m+p_0)\chi_s \\ (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi_s \end{pmatrix}, \\ v_{ps} &= \frac{m - p\!\!\!/}{\sqrt{2m(m+p_0)}} v_s = \frac{1}{\sqrt{2m(m+p_0)}} \begin{pmatrix} (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})\chi_s \\ (m+p_0)\chi_s \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{2}$$

(d) Man definiert den adjungierten Bispinor durch $\bar\psi := \psi^\dagger \gamma^0$. Zeigen Sie, dass mit dieser Definition die folgenden Orthonormalitätsrelationen gelten:

$$\bar u_{ps} u_{ps'} = \delta_{ss'}, \qquad \bar v_{ps} v_{ps'} = -\delta_{ss'}, \qquad \bar u_{ps} v_{ps'} = 0 = \bar v_{ps} u_{ps'}. \tag{3}$$

Dazu ist es hilfreich, die Identitäten $\bar u_{ps}(p\!\!\!/ - m) = 0$ und $\bar v_{ps}(p\!\!\!/ + m) = 0$ zu zeigen. Warum ist für die Orthonormierung die einfache hermitesche Konjugation $(.)^\dagger$ nicht ausreichend?

(e) Berechnen Sie die Viererstromdichte $j^\mu = \bar\psi \gamma^\mu \psi$ der beiden ebenen Wellen $\psi^\pm_{ps}(x)$. Zur Erinnerung: $(\gamma^\nu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\nu\gamma^0$.

(f) Die ebenen Wellen sind eine Basis, aus der man beliebige Wellenpakete linear kombinieren kann:

$$\psi(x) = \int \frac{\mathrm{d}^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=1,2} \left\{ f_s(\boldsymbol{p}) e^{-ix\cdot p} u_{ps} + g_s^*(\boldsymbol{p}) e^{ix\cdot p} v_{ps} \right\} . \tag{4}$$

Überprüfen Sie die Normierung dieses Dirac-Spinors: $\int \mathrm{d}^3 x \psi^\dagger(x)\psi(x) = 1$. Wie lautet der Ausdruck für die Stromdichte $\boldsymbol{j}$? Addieren sich die Beiträge positiver und negativer Energie zur Stromdichte einfach?

Literatur: z.B.

- F. Scheck, “Quantum Physics” (Springer, 2007), Chap. 9.1
- F. Schwabl, “Advanced Quantum Mechanics” (Springer, 2008), Part II: Relativistic Wave Equations