



Name: _____

18.02.2010

Matrikel-Nr.: _____

Bitte ausfüllen und als Deckblatt mit der Lösung abgeben!

Bearbeitungszeit: 180 min

Hilfsmittel: keine

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte					/36

Aufgabe 1: Kondensation wechselwirkender Bosonen in einer Falle

(9 Punkte)

Es seien N identische Bosonen der Masse m und Spin $s = 0$, die über ein kurzreichweitiges Kontaktpotential $V(x - y) = g\delta(x - y)$ wechselwirken, in einem Potential $U(x)$ gefangen. In Fockdarstellung lautet der Hamiltonoperator dieses Problems

$$H = \int dx \left\{ \Psi^\dagger(x) \left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + U(x) \right] \Psi(x) + \frac{g}{2} \Psi^\dagger(x) \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \Psi(x) \right\}. \quad (1)$$

Gesucht ist die Einteilchendichte $n_0(x) = \langle \Psi^\dagger(x) \Psi(x) \rangle_0$ des Grundzustands für große Teilchenzahlen $N \gg 1$. Wir verfolgen eine Hartree-Fock-Strategie und setzen den Grundzustand wie folgt an: $|N_0\rangle = (b_0^\dagger)^N |0\rangle / \sqrt{N!}$, mit $[b_0, b_0^\dagger] = 1$. Hierbei erzeugt $b_0^\dagger = \int dx \phi_0(x) \Psi^\dagger(x)$ ein Boson in der entsprechenden Grundzustandsmode $\phi_0(x)$, die im folgenden zu bestimmen ist.

- (a) Kommentieren Sie die Struktur des Zustandes $|N_0\rangle$. Welchen Ansatz müsste man stattdessen für Fermionen wählen?
- (b) Berechnen Sie die Grundzustandsenergie $E_0 = \langle N_0 | H | N_0 \rangle$.

[Tipp: Unter Vernachlässigung von Fluktuationen ist $\Psi(x) = \phi_0(x)b_0$, so dass lediglich Erwartungswerte der Form $\langle N_0 | b_0^\dagger b_0 | N_0 \rangle$ und $\langle N_0 | b_0^\dagger b_0^\dagger b_0 b_0 | N_0 \rangle$ auszuwerten sind.]

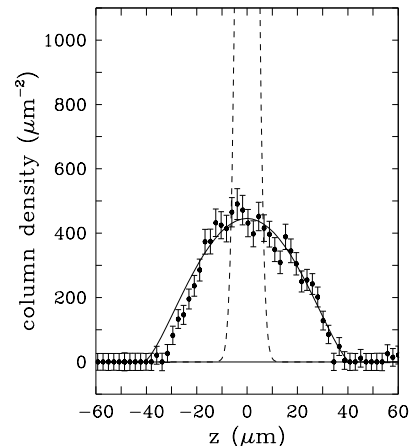
Zeigen Sie, dass die Grundzustandsenergie für $N \gg 1$ die folgende Form annimmt:

$$E_0 = N \int dx \phi_0^* \left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + U(x) + \frac{Ng}{2} |\phi_0|^2 \right] \phi_0. \quad (2)$$

- (c) Gemäß dem Variationsprinzip minimiert die Grundzustandsmode ϕ_0 das Energiefunktional (2) unter der Bedingung $\int dx |\phi_0|^2 = 1$. Sie erfüllt also $\delta(E_0 - \mu N \int dx |\phi_0|^2) = 0$, wobei der Lagrange-Parameter μ sich als das chemische Potential herausstellt. Folgern Sie, dass ϕ_0 die nichtlineare Schrödinger-Gleichung erfüllt:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + U(x) - \mu + Ng |\phi_0|^2 \right] \phi_0 = 0. \quad (3)$$

- (d) In Aufgabe 3 der Klausur 1 hat ein einfacher Variationsansatz für dasselbe Problem gezeigt, dass der Beitrag der kinetischen Energie bei fester Wechselwirkungsstärke g und großer Teilchenzahl vernachlässigbar wird. Zeigen Sie, dass das Dichteprofil des Kondensats in diesem Regime durch $n_0(x) = [\mu - U(x)]/g$ gegeben ist, solange $\mu > U(x)$, und $n_0(x) = 0$ sonst. Welches Profil findet man für eine harmonische Falle $U(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$? Vergleichen Sie Ihre Vorhersage qualitativ mit den experimentellen Daten in der Abbildung rechts [durchgezogen: mean-field-Theorie; gestrichelt: Vorhersage für das ideale Bose-Gas. Quelle: Y. Castin, in "Coherent atomic matter waves", p.1-136, ed. R. Kaiser et al., (2001), preprint: cond-mat/0105058]



Aufgabe 2: Spinwellen in der Holstein-Primakoff-Darstellung

(9 Punkte)

Auf einem Gitter mit Plätzen $i = 1, \dots, N$ sitzen Spins \mathbf{S}_i , die über eine ferromagnetische Austauschwechselwirkung $J > 0$ gekoppelt sind (Heisenberg-Modell):

$$H = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \quad (4)$$

Hierbei bezeichnet $\langle i, j \rangle$ alle $Nz/2$ Nächste-Nachbar-Paare; z wird Koordinationszahl genannt und ist $z = 2d$ auf einem d -dimensionalen kubischen Gitter. Es gilt die $SU(2)$ -Kommuntationsrelation $[S_j^m, S_k^n] = \delta_{jk} i \epsilon_{mnp} S_j^p$.

Im Grundzustand dieses Modells sind alle Spins in dieselbe Richtung ausgerichtet, die wir als z -Richtung bezeichnen wollen: $|\psi_0\rangle = |\{m_i = +S\}\rangle$. Die Anregungen dieses Zustandes sind *Spinwellen*, die im folgenden mit der Holstein-Primakoff-Darstellung charakterisiert werden sollen.

- (a) Betrachten Sie einen einzelnen Spin $\mathbf{S} = (S^x, S^y, S^z)$, dessen Komponenten $S^\pm = S^x \pm iS^y$ die üblichen Kommuntationsrelationen eines Vektoroperators erfüllen:

$$[S^z, S^\pm] = \pm S^\pm \quad \text{und} \quad [S^+, S^-] = 2S^z. \quad (5)$$

Nach Holstein und Primakoff können diese Spinkomponenten durch bosonische Erzeuger und Vernichter dargestellt werden. Mit $[b, b^\dagger] = 1$ und $b^\dagger b = \hat{n}$ ist

$$S^+ = (2S - \hat{n})^{1/2} b, \quad S^- = b^\dagger (2S - \hat{n})^{1/2}, \quad S^z = S - \hat{n}. \quad (6)$$

Überprüfen Sie, dass die Spinkommuntationsrelationen (5) in der Tat korrekt reproduziert werden. Nutzen Sie dabei insbesondere, dass $[\hat{n}, f(\hat{n})] = 0$ für jede Funktion $f(\hat{n})$.

- (b) Zeigen Sie, dass sich der Hamiltonoperator (4) ohne Näherung wie folgt schreiben lässt:

$$H = C - 2JS \sum_{\langle i, j \rangle} \left[b_i^\dagger (1 - \frac{\hat{n}_i}{2S})^{1/2} (1 - \frac{\hat{n}_j}{2S})^{1/2} b_j - \hat{n}_i + \frac{\hat{n}_i \hat{n}_j}{2S} \right]. \quad (7)$$

Wie lautet die Konstante C und welche Bedeutung hat sie?

- (c) Der voll polarisierte Spinzustand wird mit dem Holstein-Primakoff-Oszillator-Grundzustand identifiziert: $|m = +S\rangle =: |0\rangle$, mit $b|0\rangle = 0$. Bei kleinen Fluktuationen um den Grundzustand herum werden nur die niedrigsten angeregten Oszillator-Zustände gebraucht, so dass die zunächst befremdlich anmutenden Wurzelfunktionen entwickelt werden können: $(1 - \hat{n}/2S)^{1/2} = 1 - \hat{n}/4S + \dots \approx 1$.

Zeigen Sie, dass die Anregungen somit in führender Ordnung in $1/S$ durch einen Hamilton-Operator H_2 beschrieben werden, der nur noch quadratisch in den b_i bzw. b_i^\dagger ist. Was hat man mit dieser Entwicklung also erreicht?

- (d) Der Hamilton-Operator H_2 ist translationsinvariant und kann deshalb in der Fourierbasis diagonalisiert werden. Zeigen Sie, dass durch den Basiswechsel $b_i = N^{-1/2} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_i} b_{\mathbf{k}}$ die einfache Diagonalform

$$H_2 = \sum_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} b_{\mathbf{k}}^\dagger b_{\mathbf{k}} \quad (8)$$

erreicht wird. Nutzen Sie dazu die diskrete Orthogonalitätsrelation $\sum_i e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}_i} = N \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, und beachten Sie, dass

$$\sum_{\langle i, j \rangle} f(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j) = \sum_i \frac{1}{2} \sum_{\delta=1}^z f(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_i + \mathbf{a}_\delta) \quad (9)$$

auf dem Gitter mit nächsten Nachbarn an den relativen Positionen $\mathbf{a}_\delta = \pm a \hat{\mathbf{e}}_l$, wobei a der Gitterabstand auf dem einfachen kubischen Gitter mit Basisvektoren $\hat{\mathbf{e}}_l$, $l = 1, \dots, d$ ist.

Leiten Sie so die Spinwellen-Dispersion her: $\omega_{\mathbf{k}} = 2dJS \left[1 - \frac{1}{d} \sum_{l=1}^d \cos(ak_l) \right]$.

Gibt es eine Energielücke zwischen dem Grundzustand und den Anregungen im thermodynamischen Limes eines unendlich ausgedehnten Systems? Welche Art von Dispersionsrelation haben die Anregungen mit kleinen Energien?

Aufgabe 3: Nichtrelativistischer Grenzfall der Klein-Gordon-Gleichung

(9 Punkte)

Es sei $\psi(x) \in \mathbb{C}$ ein skalares Feld, das der freien Klein-Gordon-Gleichung

$$(\partial^2 + m^2)\psi(x) = 0 \quad (10)$$

genügt (in Einheiten mit $\hbar = c = 1$). Dabei ist $x \in \mathbb{R}^4$ der kontravariante 4-Vektor der Koordinaten im Minkowski-Raum, und wir notieren $a^2 = a \cdot a = a_\mu a^\mu$.

- (a) Kann das Feld $\psi(x)$ als Einteilchenwellenfunktion im Sinne Schrödingers und Borns interpretiert werden? Zeigen Sie dazu, dass die Klein-Gordon-Gleichung die Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ für die 4-Stromdichte

$$j^\mu = \frac{1}{2im} [(\partial^\mu \psi)\psi^* - \psi(\partial^\mu \psi^*)] \quad (11)$$

impliziert und kommentieren Sie die Form der Dichte j^0 .

- (b) Zeigen Sie, dass eine Lösung der freien Klein-Gordon-Gleichung als ebene Welle angesetzt werden kann: $\psi_p^+(x) = e^{-ix \cdot p} \psi_0$. Welche Bedingung erfüllt der 4-Impuls p ? Welche andere Lösung gibt es außerdem noch?
- (c) Man definiert die beiden Felder $\phi_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \frac{i}{m} \partial_t)\psi$, so dass $\psi = \phi_+ + \phi_-$.
Wie lautet ϕ_\pm für die konkrete Lösung $\psi = \psi_p^+$ im Ruhesystem $\tilde{p} = (m, \mathbf{0})$? Welche Eigenschaft haben die Kombinationen ϕ_\pm offenbar?
- (d) Zeigen Sie, dass sich die Klein-Gordon-Gleichung allgemein und ohne Näherung in Hamilton'sche Form bringen lässt:

$$i\partial_t \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = \left[m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\nabla^2}{2m} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}. \quad (12)$$

- (e) Wir suchen eine nichtrelativistische Gleichung (und deren relativistische Korrekturen) für Felder mit einer Energie knapp oberhalb der Ruheenergie $+m$. Wir definieren

$$\begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (13)$$

um die Zeitentwicklung der Amplitude $\varphi = e^{imt} \phi_+$ mit kleiner Frequenz $\varepsilon \ll m$ von der schnellen Zeitentwicklung mit m zu trennen. Eliminieren Sie die kleine Komponente χ und zeigen Sie, dass φ eine Bewegungsgleichung der Schrödingerform erfüllt:

$$i\partial_t \varphi = H\varphi. \quad (14)$$

Wie interpretieren Sie die beiden führenden Terme in H ? Ist diese Gleichung mit einer Einteilchen-Interpretation verträglich? Wie lautet der zugehörige Stromvektor \mathbf{j} ?

Aufgabe 4: Spektrum eines relativistischen Elektrons im homogenen Magnetfeld (9 Punkte)

Wir wollen das Spektrum eines relativistischen Elektrons im homogenen magnetischen Feld $\mathbf{B} = (0, 0, B_0)$ bestimmen und wählen das Vektorpotential $\mathbf{A} = (0, B_0 x, 0)$.

Unser Startpunkt ist die Dirac-Gleichung

$$(\not{p} - e\mathbf{A} - m)\psi = 0 \quad (15)$$

für die Feldamplitude $\psi(x)$ eines Elektrons in einem elektromagnetischen Potential A_μ . Es gilt die Feynman-Notation $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$, und in der Ortsdarstellung ist $p_\mu = i\partial_\mu$, so dass $[p_\mu, f(x)] = i(\partial_\mu f(x))$. Die Dirac-Matrizen erfüllen die Clifford-Algebra-Relation $\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$. In der Standard-Darstellung ist $\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix}$ mit den üblichen Pauli-Matrizen, die die $su(2)$ -Algebra aufspannen: $[\sigma^k, \sigma^l] = 2i\epsilon_{klm}\sigma^m$. Insbesondere ist $\sigma_z = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, mit Eigenvektoren $\phi_i^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\phi_i^- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Beweisen Sie zunächst die Identität $\not{a}\not{b} = a \cdot b + \frac{1}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]a_\mu b_\nu$.
 (b) Folgern Sie daraus, dass allgemein

$$(\not{p} - e\mathbf{A})^2 = (p - eA)^2 - \frac{ie}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]F_{\mu\nu} \quad (16)$$

mit dem Feldtensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Schreiben Sie dieses Resultat für den hier interessierenden Fall des homogenen Magnetfeldes konkret aus.

- (c) Betrachten Sie die quadratische Dirac-Gleichung $(\not{p} - e\mathbf{A} + m)(\not{p} - e\mathbf{A} - m)\psi = 0$ und zeigen Sie, dass jede Spin- $\frac{1}{2}$ -Komponente des Bispinors $\psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ die folgende Gleichung erfüllt:

$$[-\partial_t^2 + \partial_x^2 - (i\partial_y - eB_0 x)^2 + \partial_z^2 - m^2 - eB_0 \sigma_z] \phi_i(t, x, y, z) = 0. \quad (17)$$

- (d) Warum ist der folgende Lösungsansatz erfolgversprechend?: $\phi_i = e^{-i(Et - k_y y - k_z z)} \varphi_\pm(x) \phi_i^\pm$. Zeigen Sie, dass $\varphi(x)$ die Differentialgleichung eines harmonischen Oszillators der Form

$$[-\partial_x^2 + m^2 \omega_0^2 (x_0 - x)^2] \varphi_\pm = 2m\varepsilon_\pm \varphi_\pm \quad (18)$$

löst und bestimmen Sie die Koeffizienten ω_0, x_0 , sowie ε_\pm .

- (e) Sie kennen das Spektrum des harmonischen Oszillators? Dann können Sie zeigen, dass der positive Teils des Spektrums eines relativistischen Elektrons im homogenen B -Feld wie folgt aussieht:

$$E_{k_z, l, \sigma} = [m^2 + k_z^2 + 2eB_0 \{l + \frac{1}{2}(1 + \sigma)\}]^{1/2}. \quad (19)$$

Welche Beiträge zur Energie werden durch die Quantenzahlen k_z, l, σ jeweils bezeichnet? Welche Energieniveaus kennzeichnen die Bewegung in der Ebene senkrecht zum angelegten B -Feld im nichtrelativistischen Limes $eB_0 \ll m^2$?

Wie groß muss B_0 für ein Elektron (Ruheenergie $mc^2 \approx 0.5 \text{ MeV}$, Bohr-Magneton $e\hbar/2m \approx 60 \mu\text{eV/T}$) sein, damit die relativistischen Korrekturen zum Spektrum sichtbar werden?